

Zadania domowe z mechaniki Kwantowej IIA

Seria 4

1. Sprawdź, że gęstość Lagranżjanu

$$L = G\bar{\psi}_{1L}\gamma^\mu\psi_{2L}\bar{\psi}_{3L}\gamma_\mu\psi_{4L} \quad (1)$$

narusza parzystość przestrzenną $\mathcal{P}$ (ψ_i są bispinorami Diraka).

2. Oblicz komutatory

(a) $[\sigma^{\lambda\rho}, \sigma^{\mu\nu}]$,

(b) $[\sigma^{\lambda\rho}, \gamma^\mu]$,

(c) $[\sigma^{\lambda\rho}, \gamma^5\gamma^\mu]$.

3. Niech $\alpha^k = \gamma^0\gamma^k$, $\beta = \gamma^0$, $k = 1, 2, 3$. Pokaż, że

$$\frac{dx^k}{dt} = i[H, x^k] = \alpha^k, \quad (2)$$

t.j., że α^k mają interpretację prędkości.

4. Niech $H|E\rangle = E|E\rangle$, $\langle E|E\rangle = 1$. Pokaż, że

$$\langle O \rangle = \frac{1}{2E} \langle \{H, O\} \rangle, \quad (3)$$

gdzie $\langle O \rangle = \langle E|O|E \rangle / \langle E|E \rangle$. Oblicz $\langle \beta \rangle$ używając Hamiltonianu Diraka.

5. Prąd aksjalny zdefiniowany jest następująco: $j_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$. Pokaż, że obiekt ten transformuje się względem transformacji Lorentza jak pseudowektor (zmienia znak pod działaniem operacji parzystości przestrzennej). Używając równania Diraka, pokaż, że

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2m\bar{\psi}\gamma^5\psi. \quad (4)$$

6. Niech $S^i = \frac{1}{2}\gamma^5\gamma^0\gamma^i$, $i = 1, 2, 3$. Pokaż, że

(a) $[S^i, S^j] = i\epsilon^{ijk}S^k$,

(b) $(\vec{S})^2 = -\frac{3}{4}$.

7. Rozwiąż jawnie swobodne równanie Diraka w reprezentacji Weyla i w reprezentacji Diraka.

Szukaj rozwiązań w postaci $\psi(x) = e^{\pm ipx}\psi(p)$. Przedstaw bispinor ψ w postaci $\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}$.

Znajdź równanie na ϕ w granicy powolnego elektronu w obu przypadkach.

8. Udowodnij tożsamość $e^{i\vec{r}\vec{\sigma}} = \cos(r) + i\frac{\vec{r}\vec{\sigma}}{r}\sin(r)$, $r = |\vec{r}|$, gdzie σ^i to macierze Pauliego, $i = 1, 2, 3$.

9. Wykonaj operację odpowiadającą obrotowi układu współrzędnych o kąt θ wokół osi y na bispinorze opisującym cząstkę o dodatniej energii i pędzie $\vec{p}$.
10. Napisz równanie Diraka w $2 + 1$ wymiarach. Pokaż, że wyraz masowy narusza parzystość i symetrię względem odwrócenia czasu. *Uwaga:* Zdefiniuj nietrywialną parzystość przestrzenną. *Wskazówka:* macierze γ^μ są w tym przypadku macierzami Pauliego pomnożonymi przez odpowiednie potęgi czynnika i ($i^2 = -1$).
11. Znajdź efekt działania transformacji $\mathcal{C}$ i $\mathcal{P}$ na spinory ψ_L i ψ_R .

Uwaga 1: W reprezentacji Weyla macierze Diraka mają postać

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

gdzie $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$ i σ^i , $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego. W reprezentacji Weyla generatory obrotów i pchnięć wyglądają następująco:

$$J^i = \begin{pmatrix} \sigma^i/2 & 0 \\ 0 & \sigma^i/2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$K^i = -i \begin{pmatrix} \sigma^i/2 & 0 \\ 0 & -\sigma^i/2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

gdzie σ^i , $i = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego.

Uwaga 2: W reprezentacji Weyla $\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

W reprezentacji Diraka $\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.