

Zadania domowe z mechaniki Kwantowej IIA

Seria 5

1. Znajdź bispinor o spiralskości $\lambda = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = +\frac{1}{2}$ dla elektronu o masie m poruszającego się z pędem $\vec{p} = p(\sin(\alpha), 0, \cos(\alpha))$. W tym celu wykonaj odpowiednią transformację na bispinorze, który jest stanem własnym operatora Σ^3 .
2. Skwantuj pole Diraka w pudle o objętości V . Pokaż, że energia próżni jest proporcjonalna do V . (Nałóż na funkcje falowe odpowiednie warunki na brzegach pudła.)
3. Oblicz na dwa sposoby wyrażenie $\bar{u}(p')(p'\gamma^\mu + \gamma^\mu p)u(p)$ i pokaż, że

$$2m\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')(p' + p)^\mu u(p) + i\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu u(p). \quad (1)$$

4. Oblicz

$$\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(0))|0\rangle, \quad (2)$$

gdzie ψ jest bispinorowym operatorem pola Dirakowskiego, zaś uporządkowanie czasowe dla dwu operatorów fermionowych zdefiniowane jest następująco: $T(A(x)B(0)) = \theta(x^0)AB - \theta(-x^0)BA$.

5. Niech $u(p)$ oznacza swobodną cząstkę Diraka o dodatniej energii, w reprezentacji Diraka. Wykonaj przekształcenie $u'(p) = Uu(p)$, za pomocą macierzy unitarnej $U = e^{W\vec{\gamma}\vec{n}}$ gdzie $\vec{n}\vec{n} = 1$ oraz $\tan(W) = \frac{|\vec{p}|}{m+E_p}$. Znajdź postać hamiltonianu Diraka w bazie rozwiązań otrzymanych z $u(p)$ (i $v(p)$) za pomocą przekształcenia U . Wskazówka: dokonaj transformacji podobieństwa na standardowym swobodnym Hamiltonianie Diraka, $H' = UH_DU^{-1}$.

6. Moment pędu kwantowego pola Diraka zadany jest wyrażeniem

$$M_{\mu\nu} = \int d^3x \psi^\dagger(x) \left[i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \right] \psi(x). \quad (3)$$

Pokaż, że

$$[M_{\mu\nu}, \psi(x)] = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \psi(x) - \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} \psi(x). \quad (4)$$

7. Fala płaska opisująca stan z dodatnią energią

$$\psi_{in}(x) = e^{ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

pada z lewej strony na próg potencjału o wysokości $V_0 > 0$,

$$V(x) \begin{cases} 0, & x < 0 \quad (\text{obszar I}) \\ V_0, & x \geq 0 \quad (\text{obszar II}) \end{cases}. \quad (6)$$

Zapisz fale odbitą i przechodzącą w postaci sumy dwu fal o różnych skrętnościach. Rozważ przypadek gdy $V_0 - E > m$. Używając warunków ciągłości sprawdź czy skrętność zachowuje się w tym procesie.