

Zadania domowe z mechaniki Kwantowej IIA

Seria 7

1. Wykaż, że dla cząstki o spinie $1/2$ i masie m , poruszającej się z pędem $\vec{k}$, zachodzi

$$\text{Tr} [\Lambda_{\pm}(k)P(\pm n)] = 1. \quad (1)$$

W powyższym wyrażeniu $\Lambda_{\pm}(k) = \frac{\pm \not{k} + m}{2m}$, $P(n) = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5 \not{n})$, oraz $n^2 = -1$, $n \cdot k = 0$.

2. Stan swobodnego elektronu w chwili $t = 0$ opisany jest funkcją

$$\psi(t = 0, \vec{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{3/4}} e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{2d^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Znajdź $\psi(t > 0, \vec{x})$.

3. Określ skrętność fotonów opisanych wektorami polaryzacji $\epsilon_+^\mu(k\vec{e}_z) = 1/\sqrt{2}(0, 1, i, 0)^T$ oraz $\epsilon_-^\mu(k\vec{e}_z) = 1/\sqrt{2}(0, 1, -i, 0)^T$.
4. Jak należy zmodyfikować rozkład skwantowanego pola Dirakowskiego na operatory kreacji i anihilacji aby wykonać granicę $m \rightarrow 0$? Jaką postać przyjmą w tej granicy operatory rzutowania na stany o dodatniej i ujemnej energii? Jak wyglądać będą w tej granicy warunki normalizacji spinorów u i v ?
5. Wektory określające liniowe polaryzacje poprzecznych fotonów w cechowaniu Coulomba spełniają związki: $\vec{k}\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) = \vec{k}\vec{\epsilon}_2(\vec{k}) = 0$, $\vec{\epsilon}_r(\vec{k})\vec{\epsilon}_s(\vec{k}) = \delta_{rs}$, $\vec{\epsilon}_1(\vec{k}) \times \vec{\epsilon}_2(\vec{k}) = \vec{k}/|\vec{k}|$, $\vec{\epsilon}_1(-\vec{k}) = \vec{\epsilon}_1(\vec{k})$, $\vec{\epsilon}_2(-\vec{k}) = -\vec{\epsilon}_2(\vec{k})$. Znajdź jawną postać operatora rzutowego $I^{ij}(\vec{k}) = \sum_{s=1}^{s=2} \epsilon_s^i(\vec{k})\epsilon_s^j(\vec{k})$, $i, j = 1, 2, 3$.
6. Korzystając z poprzedniego zadania znajdź propagator fotonu w cechowaniu Coulomba:

$$D_{tr}^{ij}(x) = -i\langle 0|T(A^i(x)A^j(0))|0\rangle, \quad (3)$$

gdzie indeks tr przypomina o warunku poprzeczności $div\vec{A} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$.