Zadania domowe, seria 0

1. Pokaż, że $\frac{\partial}{\partial\alpha_b} e^{i\alpha_a X_a} = \int_0^1 ds\, e^{is\alpha_a X_a}(iX_b)e^{i(1-s)\alpha_c X_c}$.

2. Znajdź jawną postać macierzy $e^{i\alpha A}$ gdzie $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Pokaż, że reprezentacja o spinie 1, którą otrzymaliśmy za pomocą procedury najwyższych wag jest równoważna reprezentacji dołączonej z $f_{abc} = \epsilon_{abc}$, znjdując macierz transformacji podobieństwa.

4. Macierze $(\sigma_a)_{ij}$, $(\eta_b)_{xy}$, gdzie $a, b = 1, 2, 3$, są macierzami Pauliego w dwu różnych przestrzeniach. W przestrzeni, która jest iloczynem tensorowym tych dwu przestrzeni definiujemy bazę
$$\begin{aligned} \mid 1 > = \mid i = 1 > \mid x = 1 >, &\quad \mid 2 > = \mid 1 > \mid 2 > \\ \mid 3 > = \mid 2 > \mid 1 >, &\quad \mid 4 > = \mid 2 > \mid 2 > . \end{aligned}$$
Zapisz macierze $\sigma_2 \otimes \eta_1$ i $\sigma_1 \otimes \eta_2$ w tej bazie.

5. W pewnym procesie para pionów produkuje się w stanie z orbitalnym momentem pędu $L = 0$. Jakie wartości całkowitego izospinu są możliwe dla tego stanu?

6. Rozłóż iloczyn tensorowy $\underline{3} \otimes \underline{3}$ używając techniki najwyższej wagi.

7. Znajdź elementy macierzowe $< u \mid T_a \mid v >$ gdzie T_a jest generatorem $SU(3)$, zaś $\mid u >$, $\mid v >$ dane są przez tensory u^i_j i v^i_j w reprezentacji dołączonej. Zapisz wynik przez składowe tych tensorów i macierze λ_a Gell-Manna.

8. Macierze unitarne o wymiarze $N \times N$ i o wyznaczniku równym 1, tworzą grupę $SU(N)$. Pokaż, że grupa ta jest generowana przez $N^2 - 1$ generatorów, tzn., że rozmaitość grupową można sparametryzować przez

$N^2 - 1$ niezależnych rzeczywistych parametrów. Pokaż także, że maksymalny zbiór wzajemnie komutujących generatorów tej grupy zawiera $N - 1$ elementów.

9. Użyj argumentu Gell-Manna w celu wyrażenia momentów magnetycznych lekkich barionów z oktetu $SU(3)$ przez momenty magnetyczne protonu i neutronu, $\mu(n)$, $\mu(p)$ (lub przeprowadź analogiczne rozumowanie dla dekupletu rezonansów barionowych).