Badanie całkowalności wymiernych, jednorodnych potencjałów.

Michał Studziński

Uniwersytet Mikołaja Kopernika

08.06.2010

Plan prezentacji

- Klasa zagadnień
- Warunki konieczne całkowalności
- Wyniki dla dwóch stopni swobody
- Podsumowanie

Klasa zagadnień

M. Studziński

- Rozważamy naturalne układy hamiltonowskie

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + V(q_1, \ldots, q_n).$$

- Zakładamy, że $V(\mathbf{q}) \in \mathbb{C}(\mathbf{q})$

$$V(\mathbf{q}) = \frac{W(\mathbf{q})}{U(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}), U(\mathbf{q}) \in \mathbb{C}[\mathbf{q}]$$

- $V(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n) = \lambda^k V(q_1, \ldots, q_n), \ \lambda \in \mathbb{C}^*$

$$k = m - s \in \mathbb{Z}, \quad m := \deg W(\mathbf{q}), \quad s := \deg U(\mathbf{q})$$

Klasa zagadnień

- Rozważamy naturalne układy hamiltonowskie

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + V(q_1, \ldots, q_n).$$

- Zakładamy, że $V(\mathbf{q}) \in \mathbb{C}(\mathbf{q})$

$$V(\mathbf{q}) = \frac{W(\mathbf{q})}{U(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}), U(\mathbf{q}) \in \mathbb{C}[\mathbf{q}]$$

- $V(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n) = \lambda^k V(q_1, \ldots, q_n), \ \lambda \in \mathbb{C}^*$

$$k = m - s \in \mathbb{Z}, \quad m := \deg W(\mathbf{q}), \quad s := \deg U(\mathbf{q})$$

Klasa zagadnień

- Rozważamy naturalne układy hamiltonowskie

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + V(q_1, \ldots, q_n).$$

- Zakładamy, że $V(\mathbf{q}) \in \mathbb{C}(\mathbf{q})$

$$V(\mathbf{q}) = \frac{W(\mathbf{q})}{U(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}), U(\mathbf{q}) \in \mathbb{C}[\mathbf{q}]$$

- $V(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n) = \lambda^k V(q_1, \ldots, q_n), \ \lambda \in \mathbb{C}^*$

$$k = m - s \in \mathbb{Z}, \quad m := \deg W(\mathbf{q}), \quad s := \deg U(\mathbf{q})$$

Warunki konieczne całkowalności

Definicja

Niezerowy wektor $\mathbf{d} \in \mathbb{C}^n$ nazywamy punktem Darboux wymiernego potencjału jednorodnego $V(\mathbf{q}) = W(\mathbf{q})/U(\mathbf{q})$ wtedy i tylko wtedy, gdy gradient $V'(\mathbf{d})$ potencjału V jest równoległy do $\mathbf{d}$ i $U(\mathbf{d}) \neq 0$. Możemy to zapisać na dwa równoważne sposoby

$$\mathbf{d} \wedge V'(\mathbf{d}) = 0, \tag{1}$$

lub

$$V'(\mathbf{d}) = \gamma \mathbf{d}, \tag{2}$$

gdzie $\gamma \in \mathbb{C}$.

Warunki konieczne całkowalności

M. Studziński

- Dla układów z naturalnym hamiltonianem mamy

$$\dot{q}_i = p_i, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Punkt **d** wyznacza rozwiązanie szczególne
  1. $$\mathbf{q}(t) = \varphi(t)\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \dot{\varphi}(t)\mathbf{d}, \quad \ddot{\varphi} = -\varphi^{k-1},$$
  2. $$\mathbf{q}(t) = t\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{d}$$

Warunki konieczne całkowalności

- Dla układów z naturalnym hamiltonianem mamy

$$\dot{q}_i = p_i, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Punkt $\mathbf{d}$ wyznacza rozwiązanie szczególne

1. $$\mathbf{q}(t) = \varphi(t)\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \dot{\varphi}(t)\mathbf{d}, \quad \ddot{\varphi} = -\varphi^{k-1},$$

2. $$\mathbf{q}(t) = t\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{d}.$$

Warunki konieczne całkowalności

- Dla układów z naturalnym hamiltonianem mamy

$$\dot{q}_i = p_i, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Punkt $\mathbf{d}$ wyznacza rozwiązanie szczególne
  1. $$\mathbf{q}(t) = \varphi(t)\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \dot{\varphi}(t)\mathbf{d}, \quad \ddot{\varphi} = -\varphi^{k-1},$$
  2. $$\mathbf{q}(t) = t\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{d}.$$

Warunki konieczne całkowalności

- Dla układów z naturalnym hamiltonianem mamy

$$\dot{q}_i = p_i, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Punkt $\mathbf{d}$ wyznacza rozwiązanie szczególne
  1. $$\mathbf{q}(t) = \varphi(t)\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \dot{\varphi}(t)\mathbf{d}, \quad \ddot{\varphi} = -\varphi^{k-1},$$
  2. $$\mathbf{q}(t) = t\mathbf{d}, \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{d}.$$

Warunki konieczne całkowalności

- Niech $\mathbf{Q}$ oznacza wariację $\mathbf{q}$ oraz $\mathbf{P}$ oznacza wariację $\mathbf{p}$, wtedy

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{P},$$
$$\dot{\mathbf{P}} = -V''(\varphi(t)\mathbf{d})\mathbf{Q} = -\varphi^{k-2}(t)V''(\mathbf{d})\mathbf{Q},$$

- Korzystamy z przekształcenia kanonicznego $\mathbf{Q} = A\eta, \quad \mathbf{P} = A\xi,.$
- $\dot{\eta}_i = \xi_i, \quad \dot{\xi}_i = -\lambda_i\varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n$
- $\ddot{\eta}_i = -\lambda_i\varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Warunki konieczne całkowalności

- Niech $\mathbf{Q}$ oznacza wariację $\mathbf{q}$ oraz $\mathbf{P}$ oznacza wariację $\mathbf{p}$, wtedy

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{P},$$
$$\dot{\mathbf{P}} = -V''(\varphi(t)\mathbf{d})\mathbf{Q} = -\varphi^{k-2}(t)V''(\mathbf{d})\mathbf{Q},$$

- Korzystamy z przekształcenia kanonicznego $\mathbf{Q} = A\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{P} = A\boldsymbol{\xi},.$
- $\dot{\eta}_i = \xi_i, \quad \dot{\xi}_i = -\lambda_i\varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n$
- $\ddot{\eta}_i = -\lambda_i\varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Warunki konieczne całkowalności

- Niech $\mathbf{Q}$ oznacza wariację $\mathbf{q}$ oraz $\mathbf{P}$ oznacza wariację $\mathbf{p}$, wtedy

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{P},$$
$$\dot{\mathbf{P}} = -V''(\varphi(t)\mathbf{d})\mathbf{Q} = -\varphi^{k-2}(t)V''(\mathbf{d})\mathbf{Q},$$

- Korzystamy z przekształcenia kanonicznego $\mathbf{Q} = A\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{P} = A\boldsymbol{\xi},.$
- $\dot{\eta}_i = \xi_i, \quad \dot{\xi}_i = -\lambda_i\varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n$
- $\ddot{\eta}_i = -\lambda_i\varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Warunki konieczne całkowalności

M. Studziński

- Niech **Q** oznacza wariację **q** oraz **P** oznacza wariację **p**, wtedy

$$\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{P},$$
$$\dot{\mathbf{P}} = -V''(\varphi(t)\mathbf{d})\mathbf{Q} = -\varphi^{k-2}(t)V''(\mathbf{d})\mathbf{Q},$$

- Korzystamy z przekształcenia kanonicznego $\mathbf{Q} = A\boldsymbol{\eta}, \quad \mathbf{P} = A\boldsymbol{\xi},.$
- $\dot{\eta}_i = \xi_i, \quad \dot{\xi}_i = -\lambda_i \varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n$
- $\ddot{\eta}_i = -\lambda_i \varphi^{k-2}(t)\eta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Warunki konieczne całkowalności

Twierdzenie Moralesa-Ramisa

Jeżeli układ równań Hamiltona $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial V/\partial \mathbf{q}$ z jednorodnym potencjałem stopnia jednorodności $k \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jest całkowalny w sensie Liouville'a, to każda para (k, λ_i) dla $i = 1, ..., n$ należy do poniższej listy

l.p.	k	λ	λ
1.	± 2	dowolne	
2.	k	$p + \frac{k}{2}p(p-1)$	

Warunki konieczne całkowalności

M. Studziński

Twierdzenie Moralesa-Ramisa cd.

l.p.	k	λ	λ
3.	k	$\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{k}+p(p+1)k\right)$	
4.	3	$-\frac{1}{24}+\frac{1}{6}\left(1+3p\right)^2,$	$-\frac{1}{24}+\frac{3}{32}\left(1+4p\right)^2$
		$-\frac{1}{24}+\frac{3}{50}\left(1+5p\right)^2,$	$-\frac{1}{24}+\frac{3}{50}\left(2+5p\right)^2$
5.	4	$-\frac{1}{8}+\frac{2}{9}\left(1+3p\right)^2$	

Warunki konieczne całkowalności

Twierdzenie Moralesa-Ramisa cd.

l.p.	k	λ	λ
6.	5	$-\frac{9}{40}+\frac{5}{18}\left(1+3p\right)^2,$	$-\frac{9}{40}+\frac{1}{10}\left(2+5p\right)^2$
7.	-3	$\frac{25}{24}-\frac{1}{6}\left(1+3p\right)^2,$	$\frac{25}{24}-\frac{3}{32}\left(1+4p\right)^2$
		$\frac{25}{24}-\frac{3}{50}\left(1+5p\right)^2,$	$\frac{25}{24}-\frac{3}{50}\left(2+5p\right)^2$
8.	-4	$\frac{9}{8}-\frac{2}{9}\left(1+3p\right)^2$	

Przypadek dwóch stopni swobody

- Dla dwóch stopni swobody

$$P(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^{s} \left(\alpha_1^{(i)} q_1 + \alpha_2^{(i)} q_2\right)^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^{s} n_i = k.$$

- Zbiór nieokreśloności $\mathcal{N}(V)$ potencjału jednorodnego $V(q_1, q_2) = W(q_1, q_2)/U(q_1, q_2)$ jest jednoelementowy

$$\mathcal{N}(V) := \{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2 \mid W(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Przypadek dwóch stopni swobody

- Dla dwóch stopni swobody

$$P(\mathbf{q}) = \prod_{i=1}^{s} \left(\alpha_1^{(i)} q_1 + \alpha_2^{(i)} q_2\right)^{n_i}, \quad \sum_{i=1}^{s} n_i = k.$$

- Zbiór nieokreśloności $\mathcal{N}(V)$ potencjału jednorodnego $V(q_1, q_2) = W(q_1, q_2)/U(q_1, q_2)$ jest jednoelementowy

$$\mathcal{N}(V) := \left\{\mathbf{q} \in \mathbb{C}^2 \mid W(\mathbf{q}) = U(\mathbf{q}) = 0\right\} = \{(0,0)\}.$$

Parametryzacja afiniczna

- Punkt Darboux w $\mathbb{CP}^1$ ma współrzędne jednorodne $\mathbf{d} = [d_1 : d_2]$, gdzie $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{C}^2$
- Wprowadźmy dwa zbiory na $\mathbb{CP}^1$

$$U_1 = \left\{ [q_1 : q_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid q_1 \neq 0 \right\},$$
$$U_2 = \left\{ [q_1 : q_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid q_2 \neq 0 \right\}.$$

- Widzimy zatem, że $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$.

Parametryzacja afiniczna

- Punkt Darboux w $\mathbb{CP}^1$ ma współrzędne jednorodne $\mathbf{d} = [d_1 : d_2]$, gdzie $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{C}^2$
- Wprowadźmy dwa zbiory na $\mathbb{CP}^1$

$$U_1 = \left\{ [q_1 : q_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid q_1 \neq 0 \right\},$$
$$U_2 = \left\{ [q_1 : q_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid q_2 \neq 0 \right\}.$$

- Widzimy zatem, że $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$.

Parametryzacja afiniczna

- Punkt Darboux w $\mathbb{CP}^1$ ma współrzędne jednorodne $\mathbf{d} = [d_1 : d_2]$, gdzie $\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{C}^2$
- Wprowadźmy dwa zbiory na $\mathbb{CP}^1$

$$U_1 = \left\{[q_1 : q_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid q_1 \neq 0\right\},$$
$$U_2 = \left\{[q_1 : q_2] \in \mathbb{CP}^1 \mid q_2 \neq 0\right\}.$$

- Widzimy zatem, że $\mathbb{CP}^1 = U_1 \cup U_2$.

Parametryzacja afiniczna

M. Studziński

- Istnieją naturalne współrzędne

$$\theta_i : \mathbb{CP}^1 \supset U_i \to \mathbb{C}, \quad i = 1, 2,$$

- dla $i = 1$ wprowadzamy $z := q_2/q_1$ natomiast dla $i = 2$ wprowadzamy $\zeta := q_1/q_2$.
- Załóżmy, że punkty Darboux znajdują się na mapie U_1, wtedy

$$U_1 := \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1]\}$$

$$\theta_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \quad z := \frac{q_2}{q_1}.$$

Parametryzacja afiniczna

M. Studziński

- Istnieją naturalne współrzędne

$$\theta_i : \mathbb{CP}^1 \supset U_i \to \mathbb{C}, \quad i = 1, 2,$$

- dla $i = 1$ wprowadzamy $z := q_2/q_1$ natomiast dla $i = 2$ wprowadzamy $\zeta := q_1/q_2$.
- Załóżmy, że punkty Darboux znajdują się na mapie U_1, wtedy

$$U_1 := \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1]\}$$
$$\theta_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \quad z := \frac{q_2}{q_1}.$$

Parametryzacja afiniczna

- Istnieją naturalne współrzędne

$$\theta_i : \mathbb{CP}^1 \supset U_i \to \mathbb{C}, \quad i = 1, 2,$$

- dla $i = 1$ wprowadzamy $z := q_2 / q_1$ natomiast dla $i = 2$ wprowadzamy $\zeta := q_1 / q_2$.
- Załóżmy, że punkty Darboux znajdują się na mapie U_1, wtedy

$$U_1 := \mathbb{CP}^1 \setminus \{[0 : 1]\}$$
$$\theta_1 : U_1 \to \mathbb{C}, \quad z := \frac{q_2}{q_1}.$$

Parametryzacja afiniczna

M. Studziński

- Ponieważ $V(\mathbf{q})$ jest jednorodny to

$$V(\mathbf{q}) = V(q_1, q_2) = V\left(q_1 \cdot 1, q_1 \cdot \frac{q_2}{q_1}\right) := \\ = q_1^k V(1, z) = q_1^k v(z).$$

- Traktując punkty Darboux jako położenia równowagi układu

$$\dot{q}_1 = -q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \dot{q}_2 = -q_2 + \frac{\partial V}{\partial q_2}$$

Parametryzacja afiniczna

- Ponieważ $V(\mathbf{q})$ jest jednorodny to

$$V(\mathbf{q}) = V(q_1, q_2) = V\left(q_1 \cdot 1, q_1 \cdot \frac{q_2}{q_1}\right) := \\ = q_1^k V(1, z) = q_1^k v(z).$$

- Traktując punkty Darboux jako położenia równowagi układu

$$\dot{q}_1 = -q_1 + \frac{\partial V}{\partial q_1}, \quad \dot{q}_2 = -q_2 + \frac{\partial V}{\partial q_2}$$

Parametryzacja afiniczna

- Po przejściu do współrzędnej afinicznej układ transformuje się do postaci

$$
\begin{aligned}
-x - x^{k-1}\widetilde{h}(z) = 0, &\quad \widetilde{h}(z) := kv(z) - zv'(z) \\
x^{k-2}\widetilde{g}(z) = 0, &\quad \widetilde{g}(z) := (1+z^2)v'(z) - kzv(z).
\end{aligned}
$$

- Uwzględniając wcześniejsze założenia

$$
\begin{aligned}
h(z) :=& kw(z)u(z) - z\left[w'(z)u(z) - u'(z)w(z)\right], \\
g(z) :=& (1+z^2)[w'(z)u(z) - u'(z)w(z)] - \\
&+ kzw(z)u(z).
\end{aligned}
$$

Parametryzacja afiniczna

- Po przejściu do współrzędnej afinicznej układ transformuje się do postaci

$$
\begin{aligned}
&-x - x^{k-1}\widetilde{h}(z) = 0, \quad \widetilde{h}(z) := kv(z) - zv'(z) \\
&x^{k-2}\widetilde{g}(z) = 0, \quad \widetilde{g}(z) := (1+z^2)v'(z) - kzv(z).
\end{aligned}
$$

- Uwzględniając wcześniejsze założenia

$$
\begin{aligned}
h(z) :=& kw(z)u(z) - z\left[w'(z)u(z) - u'(z)w(z)\right], \\
g(z) :=& (1+z^2)[w'(z)u(z) - u'(z)w(z)] - \\
& + kzw(z)u(z).
\end{aligned}
$$

Punkty Darboux

Można pokazać, że

$$\mathcal{D}^*(V) = \{z_* \in U_1 \mid g(z_*) = 0 \ \wedge \ h(z_*) \neq 0\},$$

$$\mathcal{D}(V) \setminus \mathcal{D}^*(V) = \{z_* \in U_1 \mid g(z_*) = 0 \ \wedge \ h(z_*) = 0\},$$

gdzie $\mathcal{D}(V)$ jest zbiorem wszystkich punktów Darboux.

Punkty Darboux

Twierdzenie

Liczba właściwych punktów Darboux potencjału jednorodnego $V(q_1, q_2) = W(q_1, q_2)/U(q_1, q_2)$ o ile jest skończona to jest nie większa niż $m + s$.

$$m := \deg w(z), \quad s := \deg u(z).$$

Definicja (potencjał generyczny)

Mówimy, że potencjał V jest generyczny wtedy i tylko wtedy, gdy posiada maksymalną liczbę punktów Darboux i wszystkie jego punkty Darboux są właściwe i proste.

Punkty Darboux

- Kiedy potencjał $V(q_1, q_2)$ jest niegeneryczny?

Punkty Darboux

M. Studziński

- Kiedy potencjał $V(q_1, q_2)$ jest niegeneryczny?

Twierdznie

Właściwy punkt Darboux z_* jest wielokrotny wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda(z_*) - 1 := \Lambda(z_*) = 0$.

Lemat

Jednorodny potencjał $V(q)$ posiada wielokrotne właściwe (niewłaściwe) punkty Darboux wtedy, gdy współczynniki wielomianów $w(z)$, $u(z)$ spełniają związki:

$$w_{m-1}u_s = u_{s-1}w_m, \quad kw_m u_s = 2(w_m u_{s-2} - w_{m-2}u_s),$$
$$kw_m u_s \neq 0, \quad (kw_m u_s = 0).$$

Punkty Darboux

- Kiedy potencjał $V(q_1, q_2)$ jest niegeneryczny?

Twierdznie

Właściwy punkt Darboux z_* jest wielokrotny wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda(z_*) - 1 := \Lambda(z_*) = 0$.

Lemat

Jednorodny potencjał $V(\mathbf{q})$ posiada wielokrotne, właściwe (niewłaściwe) punkty Darboux wtedy, gdy współczynniki wielomianów $w(z)$, $u(z)$ spełniają związki:

$$w_{m-1}u_s = u_{s-1}w_m, \quad kw_m u_s = 2(w_m u_{s-2} - w_{m-2}u_s),$$
$$kw_m u_s \neq 0, \quad (kw_m u_s = 0).$$

Punkty Darboux

- Kiedy potencjał $V(q_1, q_2)$ jest niegeneryczny?

Twierdznie

Właściwy punkt Darboux z_* jest wielokrotny wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda(z_*) - 1 := \Lambda(z_*) = 0$.

Lemat

Jednorodny potencjał $V(\mathbf{q})$ posiada wielokrotne, właściwe (niewłaściwe) punkty Darboux wtedy, gdy współczynniki wielomianów $w(z)$, $u(z)$ spełniają związki:

$$w_{m-1}u_s = u_{s-1}w_m, \quad kw_m u_s = 2(w_m u_{s-2} - w_{m-2}u_s),$$
$$kw_m u_s \neq 0, \quad (kw_m u_s = 0).$$

Punkty Darboux

- Kiedy potencjał $V(q_1, q_2)$ jest niegeneryczny?

Twierdznie

Właściwy punkt Darboux z_* jest wielokrotny wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda(z_*) - 1 := \Lambda(z_*) = 0$.

Lemat

Jednorodny potencjał $V(\mathbf{q})$ posiada wielokrotne, właściwe (niewłaściwe) punkty Darboux wtedy, gdy współczynniki wielomianów $w(z)$, $u(z)$ spełniają związki:

$$w_{m-1}u_s = u_{s-1}w_m, \quad kw_m u_s = 2(w_m u_{s-2} - w_{m-2}u_s),$$
$$kw_m u_s \neq 0, \quad (kw_m u_s = 0).$$

Niewłaściwe punkty Darboux

Lemat

Niech $\mathbf{d} = [d_1 : d_2]$ będzie niewłaściwym punktem Darboux spełniającym relację $d_1^2 + d_2^2 = 0$ potencjału $V(\mathbf{q}) = W(\mathbf{q})/U(\mathbf{q})$. Wtedy $\mathbf{d}$ ma krotność większą niż jeden.

-

Lemat

Niech $V(\mathbf{q})$ będzie całkowalnym w klasie funkcji wymiernych potencjałem jednorodnym stopnia $k > 2$ posiadającym niewłaściwy punkt Darboux z_*, to z_* jest wielokrotnym punktem Darboux.

-

Relacja pomiędzy wartościami własnymi λ_i hesjanu V''

- **UWAGA-przypadek wielomianowy**, $V(q_1, q_2) \in \mathbb{C}[q_1, q_2]$

Twierdzenie

Załóżmy, że jednorodny, wielomianowy potencjał $V(q_1, q_2) \in \mathbb{C}[q_1, q_2]$ posiada m różnych, prostych punktów Darboux. Wtedy wielkości $\Lambda_i := \lambda_i - 1$, gdzie λ_i są nietrywialnymi wartościami włanymi hesjanu obliczonymi w tych punktach, spełniają relację

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Lambda_i} = -1.$$

Relacja pomiędzy wartościami własnymi λ_i hesjanu V''

M. Studziński

- **UWAGA-przypadek wielomianowy**, $V(q_1, q_2) \in \mathbb{C}[q_1, q_2]$

Twierdzenie

Załóżmy, że jednorodny, wielomianowy potencjał $V(q_1, q_2) \in \mathbb{C}[q_1, q_2]$ posiada m różnych, prostych punktów Darboux. Wtedy wielkości $\Lambda_i := \lambda_i - 1$, gdzie λ_i są nietrywialnymi wartościami włanymi hesjanu obliczonymi w tych punktach, spełniają relację

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Lambda_i} = -1.$$

Relacja pomiędzy wartościami własnymi λ_i hesjanu V''

- **UWAGA-przypadek wielomianowy**, $V(q_1, q_2) \in \mathbb{C}[q_1, q_2]$

Twierdzenie

Załóżmy, że jednorodny, wielomianowy potencjał $V(q_1, q_2) \in \mathbb{C}[q_1, q_2]$ posiada m różnych, prostych punktów Darboux. Wtedy wielkości $\Lambda_i := \lambda_i - 1$, gdzie λ_i są nietrywialnymi wartościami włanymi hesjanu obliczonymi w tych punktach, spełniają relację

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Lambda_i} = -1.$$

Relacja pomiędzy λ_i - generyczny przypadek wymierny

Twierdzenie

Załóżmy, że jednorodny, wymierny potencjał $V(q_1, q_2)$ posiada $m + s$ różnych, prostych punktów Darboux. Wtedy wielkości $\Lambda_i = \lambda_i - 1$, gdzie λ_i są nietrywialnymi wartościami włanymi hesjanu obliczonymi w tych punktach, spełniają relację

$$\sum_{i=1}^{m+s} \frac{1}{\Lambda_i} = -1.$$

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- Niech potencjał $V(\mathbf{q})$ w zmiennej afinicznej z ma postać

  $$v(z) = w(z)/u(z) = (z-i)^{r_+}(z+i)^{r_-}\widetilde{w}(z)/u(z)$$

Twierdzenie

Niech V będzie potencjałem jednorodnym. Niech $r_\pm$ będzie odpowiednio wielokrotnością czynników liniowych $(q_2 \pm iq_1)$ wielomianu W. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\Lambda_i} = -1 - \theta_{r_+,2}\frac{r_+}{k-2r_+} - \theta_{r_-,2}\frac{r_-}{k-2r_-},$$

jeżeli tylko wielomian U nie faktoryzuje się przez czynnik $(q_2 \pm iq_1)$.

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- Niech potencjał $V(\mathbf{q})$ w zmiennej afinicznej z ma postać

  $$v(z) = w(z)/u(z) = (z-i)^{r_+}(z+i)^{r_-}\widetilde{w}(z)/u(z)$$

Twierdzenie

Niech V będzie potencjałem jednorodnym. Niech $r_\pm$ będzie odpowiednio wielokrotnością czynników liniowych $(q_2 \pm iq_1)$ wielomianu W. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\Lambda_i} = -1 - \theta_{r_+,2}\frac{r_+}{k-2r_+} - \theta_{r_-,2}\frac{r_-}{k-2r_-},$$

jeżeli tylko wielomian U nie faktoryzuje się przez czynnik $(q_2 \pm iq_1)$.

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- Niech potencjał $V(\mathbf{q})$ w zmiennej afinicznej z ma postać

$$v(z) = w(z)/u(z) = (z-i)^{r_+}(z+i)^{r_-}\widetilde{w}(z)/u(z)$$

Twierdzenie

Niech V będzie potencjałem jednorodnym. Niech $r_\pm$ będzie odpowiednio wielokrotnością czynników liniowych $(q_2 \pm iq_1)$ wielomianu W. Wtedy

$$\sum_{i=1}^{l} \frac{1}{\Lambda_i} = -1 - \theta_{r_+,2}\frac{r_+}{k-2r_+} - \theta_{r_-,2}\frac{r_-}{k-2r_-},$$

jeżeli tylko wielomian U nie faktoryzuje się przez czynnik $(q_2 \pm iq_1)$.

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- Niech potencjał $V(\mathbf{q})$ w zmiennej afinicznej z ma postać

$$v(z) = \frac{w(z)}{u(z)} = \frac{w(z)}{(z - z_0)^a p(z)} \tag{3}$$

Lemat

Wymierny potencjał jednorodny, który w zmiennej afinicznej z ma postać (3) posiada co najwyżej $m + n$ punktów Darboux przy czym jeden z nich jest niewłaściwy z krotnością $a - 1$.

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- Niech potencjał $V(\mathbf{q})$ w zmiennej afinicznej z ma postać

$$v(z) = \frac{w(z)}{u(z)} = \frac{w(z)}{(z - z_0)^a p(z)} \qquad (3)$$

Lemat

Wymierny potencjał jednorodny, który w zmiennej afinicznej z ma postać (3) posiada co najwyżej $m + n$ punktów Darboux przy czym jeden z nich jest niewłaściwy z krotnością $a - 1$.

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- Niech potencjał $V(\mathbf{q})$ w zmiennej afinicznej z ma postać

$$v(z) = \frac{w(z)}{u(z)} = \frac{w(z)}{(z - z_0)^a p(z)} \tag{3}$$

Lemat

Wymierny potencjał jednorodny, który w zmiennej afinicznej z ma postać (3) posiada co najwyżej $m + n$ punktów Darboux przy czym jeden z nich jest niewłaściwy z krotnością $a - 1$.

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- W przypadku badania relacji interesują nas tylko właściwe i proste punkty Darboux oraz zakładamy, że mamy do czynienia z maksymalną ich liczbą.

Lemat

Potencjał (3) może mieć co najwyżej $m + l + 1$ właściwych i prostych punktów Darboux.

Lemat

Na to aby potencjał (3) miał maksymalną liczbę punktów Darboux musi być spełnione

$$w_0 p_1 - p_0(w_1 + a w_0 z_0) \neq 0.$$

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

M. Studziński

- W przypadku badania relacji interesują nas tylko właściwe i proste punkty Darboux oraz zakładamy, że mamy do czynienia z maksymalną ich liczbą.

Lemat

Potencjał (3) może mieć co najwyżej $m + l + 1$ właściwych i prostych punktów Darboux.

Lemat

Na to aby potencjał (3) miał maksymalną liczbę punktów Darboux musi być spełnione:

$$w_0 p_1 - p_0 (w_1 + a w_0 z_0) \neq 0.$$

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- W przypadku badania relacji interesują nas tylko właściwe i proste punkty Darboux oraz zakładamy, że mamy do czynienia z maksymalną ich liczbą.

Lemat

Potencjał (3) może mieć co najwyżej $m + l + 1$ właściwych i prostych punktów Darboux.

Lemat

Na to aby potencjał (3) miał maksymalną liczbę punktów Darboux musi być spełnione

$$w_0 p_1 - p_0 (w_1 + a w_0 z_0) \neq 0.$$

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- W przypadku badania relacji interesują nas tylko właściwe i proste punkty Darboux oraz zakładamy, że mamy do czynienia z maksymalną ich liczbą.

Lemat

Potencjał (3) może mieć co najwyżej $m + l + 1$ właściwych i prostych punktów Darboux.

Lemat

Na to aby potencjał (3) miał maksymalną liczbę punktów Darboux musi być spełnione

$$w_0 p_1 - p_0(w_1 + a w_0 z_0) \neq 0.$$

Relacja pomiędzy λ_i - wybrane niegeneryczne przypadki wymierne

- W przypadku badania relacji interesują nas tylko właściwe i proste punkty Darboux oraz zakładamy, że mamy do czynienia z maksymalną ich liczbą.

Lemat

Potencjał (3) może mieć co najwyżej $m + l + 1$ właściwych i prostych punktów Darboux.

Lemat

Na to aby potencjał (3) miał maksymalną liczbę punktów Darboux musi być spełnione

$$w_0 p_1 - p_0(w_1 + a w_0 z_0) \neq 0.$$

Twierdzenie

Załóżmy, że potencjał (3) posiada maksymalną liczbę punktów Darboux i wszystkie są proste i właściwe. Wtedy wielkości $\Lambda_i = \lambda_i - 1$, gdzie λ_i są nietrywialnymi wartościami własnymi hesjanu obliczonymi w tych punktach, spełniają relację

$$\sum_{i=1}^{m+l+1} \frac{1}{\Lambda_i} = -1. \tag{4}$$

Co w przyszłości?

- Rozszerzenie problemu na dowolną ilość stopni swobody:
  1. Problem określenia dziedziny dla $V(\mathbf{q})$ w przypadku dowolnego n,
  2. Zbiory punktów Darboux nie są w ogólności rzutowymi zbiorami algebraicznymi,
  3. Próba przeprowadzenia rachunku residuów.

Dziękuję za uwagę