

Przekroje Dedekinda¹

O liczbach wymiernych (tj. zbiorze $\mathbb{Q}$) wiemy, że:

1. zbiór $\mathbb{Q}$ jest uporządkowany relacją mniejszości $<$;
2. zbiór liczb wymiernych jest gęsty, tzn.: $\forall p, q \in \mathbb{Q} : p < q \exists w : p < w < q$
3. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Przekrój Dedekinda liczb wymiernych

Przekrojem Dedekinda liczb wymiernych nazywać będziemy uporządkowaną parę podzbiorów $\mathbb{Q}$, np. $A \subset \mathbb{Q}, B \subset \mathbb{Q}$ o następujących własnościach²:

1. $A \neq \mathbb{Q}, B \neq \mathbb{Q}$
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$
3. $\forall a \in A, b \in B : a < b$

Zbiór A nazywamy klasą dolną, a zbiór B klasą górną. Klasę górną nazywamy domkniętą wtedy i tylko wtedy, gdy posiada element najmniejszy. Klasę dolną nazywamy domkniętą wtedy i tylko wtedy, gdy posiada element największy. Stąd mamy przypuszczalnie następujące możliwości:

I Klasa górna i dolna nie są domknięte.

IIa Klasa górna nie jest domknięta, a dolna jest domknięta.

IIa Klasa górna jest domknięta, a dolna nie jest domknięta.

¹Na podstawie monografii [1] i wykładu Macieja Nieszporskiego opracował Tomasz Steifer. Przypisy dodane przez wykładowcę

²Alternatywnie

1. $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
2. $A \cup B = \mathbb{Q}$
3. $\forall a \in A, b \in B : a < b$

III Obie klasy są domknięte.

Ale (!) wiemy, że zbiór $\mathbb{Q}$ jest gęsty, zatem możliwość III nie zachodzi³. Zauważmy też, że z danego przekroju IIa zawsze można zrobić przekrój typu IIb.

Przykład przekroju typu IIa:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 7\} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 7\}$$

Definicja 1. *Przekroje typu IIa i IIb nazywamy wymiernymi.*

Przykład przekroju typu I:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0 \vee (x^2 < 2 \wedge x > 0)\} \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \wedge x^2 > 2\}$$

Pokażemy, że w klasie B powyższego przekroju nie ma liczby najmniejszej.

Dowód: Niech b element klasy B. Z definicji klasy B:

$$b : b^2 > 2 \wedge b > 0$$

Zamierzamy pokazać, że dla każdego takiego wymiernego b istnieje wymierna liczba mniejsza od b , która również spełnia powyższe warunki. Taką liczbę jest $\frac{2+b^2}{2b}$. Istotnie, zauważmy, że:

$$\frac{2+b^2}{2b} < b$$

bowiem przy przyjętych założeniach o b ostatnia nierówność jest równoważna nierówności

$$2 + b^2 < 2b^2$$

tzn.

$$2 < b^2$$

³Bo między największym elementem A i najmniejszym elementem B istniałaby liczba wymierna nie należąca ani do A ani do B wbrew punktowi 2. definicji.

tzn. wskazana liczba jest większa od 2. Jednocześnie:

$$2 < \left(\frac{2+b^2}{2b}\right)^2$$

bowiem

$$2 < \frac{4+4b^2+b^4}{4b^2}$$

$$8b^2 < 4+4b^2+b^4$$

$$0 < (2-b^2)^2$$

co jest prawdziwe, bo z def. $b^2 > 2$. Pokazaliśmy, że dla każdego elementu klasy B można wskazać liczbę mniejszą, która również jest elementem B - co kończy dowód

Zadanie (jak efektywnie znajdować pierwiastki): pokazać, że ciąg rekurencyjny zadany przez $a_{n+1} = \frac{a_n^2+p}{2a_n}$, $a_1 > 0$ ma granicą $\sqrt{p}$. $\square$

Analogicznie pokazujemy, że zbiór A nie ma liczby największej⁴. A zatem (A,B) jest przekrojem typu I.

Definicja 2. *Przekroje typu I nazywamy niewymiernymi.*

Następnie dokonujemy identyfikacji - każdy przekrój niewymierny wyznacza nam liczbę (niewymierną). Dla przekrojów możemy zdefiniować m.in.:

1. relację równości:

$$(A, B) = (A', B') \iff A = A' \wedge B = B'$$

2. relację mniejszości:

$$(A, B) < (A', B') \iff A \subset A' \wedge A \neq A'$$

3. oraz operację dodawania:

$$(A, B) + (A', B') = (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A} = \{a+a' : a \in A \wedge a' \in A'\} \wedge \mathcal{B} = \{b+b' : b \in B \wedge b' \in B'\}$$

4. i tak dalej..

⁴Jeśli $a^2 < 2$ i $a > 0$ to liczba $\frac{4a}{2+a^2}$ jest dodatnia większa od a i jej kwadrat jest mniejszy od 2 patrz [2]

Fakt. *Przekroje mają strukturę ciała.*

Twierdzenie. *Między każdymi dwoma liczbami niewymiernymi znajduje się liczba wymierna.*

Dowód: Niech (A, B) i (C, D) niewymierne przekroje liczb wymiernych - takie, że:

$$(A, B) < (C, D)$$

A zatem:

$$\exists a \in \mathbb{Q} : a \notin A \wedge a \in C$$

Możemy skonstruować przekrój (S, T) taki, że:

$$S = \{x \in \mathbb{Q} \wedge x \leq a\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{Q} \wedge x > a\}$$

A zatem:

$$(A, B) < (S, T) < (C, D)$$

□

Przekrój Dedekinda liczb rzeczywistych. Ciągłość (zupełność) zbioru liczb rzeczywistych.

Mając zdefiniowaną relację mniejszości między przekrojami, możemy również rozważać przekroje Dedekinda liczb rzeczywistych.

Ciągłość (zupełność) zbioru liczb rzeczywistych. *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest ciągły (zupełny), tj. dla każdego przekroju (S, T) zbioru $\mathbb{R}$ zachodzi jedna z dwóch możliwości: albo w klasie dolnej jest liczba największa i w klasie górnej nie ma liczby najmniejszej albo: w klasie górnej jest liczba najmniejsza, ale w klasie dolnej nie ma liczby największej. Innymi słowy: przekroje Dedekinda liczb rzeczywistych są typu II, tzn. albo klasa gorna jest domknięta albo klasa dolna jest domknięta.*

Dowód: Weźmy dowolny przekrój liczb rzeczywistych (S, T) , taki, że: $\forall s \in S, \forall t \in T : s < t$ Wybierzmy podzbiory takie, że: A - podzbiór wszystkich liczb wymiernych należących do S B - podzbiór wszystkich liczb wymiernych należących do T

Zauważmy, że para (A, B) jest przekrojem liczb wymiernych. Niech μ liczba odpowiadająca temu przekrojowi. Zachodzą dwie możliwości:

$$\mu \in S \vee \mu \in T$$

Rozważmy je kolejno:

1. $\mu \in S$

Pokażemy, że w takim wypadku μ jest elementem największym S . Załóżmy niewprost, że tak nie jest, tzn. że $\exists x : x > \mu \wedge x \in S$. Skoro tak, to możemy znaleźć liczbę wymierną w , taką, że: $\mu < w < x$. Ale skoro tak, to $w \notin A$; jednocześnie z definicji A : $w \in A$, stąd sprzeczność - zatem pokazaliśmy, że μ jest elementem największym S .

2. $\mu \in T$

Pokażemy, że w takim wypadku μ jest elementem najmniejszym T . Załóżmy niewprost, że tak nie jest, tzn. że $\exists x : x < \mu \wedge x \in T$. Skoro tak, to możemy znaleźć liczbę wymierną w , taką, że: $\mu > w > x$. Ale skoro tak, to $w \notin B$; jednocześnie z definicji B : $w \in B$, stąd sprzeczność - zatem pokazaliśmy, że μ jest elementem najmniejszym T . $\square$

Literatura

[1] Wacław Sierpiński, *Działania nieskończone*, Czytelnik, Warszawa 1948.

<http://matwbn.icm.edu.pl/kstresc.php?tom=13&wyd=10>

[2] Franciszek Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1959.