

# Reguły de l'Hospitala, przykłady.

Marian Dovgialo

12/01/2011

## 1 Wstęp

Licząc granice stosunków funkcji czasami możemy otrzymać nieokreślone symbole typu  $\frac{0}{0}$  lub  $\frac{\infty}{\infty}$ . Na przykład  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ , po podstawieniu  $x = 0$  otrzymamy  $\frac{0}{0}$ . Obliczanie takich granic umożliwia nam reguła de l'Hospitala.

## 2 Definicja reguły

Mamy dwie funkcje  $f(x)$  oraz  $g(x)$ , które są określone i różniczkowalne na odcinku  $]a, b]$ , ponadto dla  $\forall c \in ]a, b] : g'(c) \neq 0$ .  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 0$  oraz  $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$ .

Ponadto istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = G$ . Wtedy  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = G$ . Podobnie jest dla  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$  i  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ .

## 3 Dowód

### 3.1 Dla $\frac{0}{0}$

Tak jak rozpatrujemy  $a \geq 0$  możemy dookreślić  $f(a) = g(a) = 0$ . Weźmiemy  $x \in [a, b]$ , stosując twierdzenie Cauchy'ego do odcinka  $[a, x]$  otrzymamy:

$\exists c \in [a, x] : \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , ale  $f(a) = g(a) = 0$  to otrzymamy:

$\exists c \in [a, x] : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ , gdy  $x \rightarrow a^+$  to  $c \rightarrow a^+$  tak jak  $c \in [a, x]$ . Więc mamy:

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = G$  co i należało udowodnić.

### 3.2 Dla $\frac{\infty}{\infty}$

Pomijamy.

### 3.3 Przykłady

Weźmy przykład, który podałem we wstępie.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

podstawiając otrzymamy:  $\frac{0}{0}$ , ale stosując regułę l'Hospitala otrzymamy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1}$$

Gdzie  $\stackrel{H}{=}$  oznacza to, że była zastosowana reguła l'Hospitala. Teraz podstawiając  $x = 0$  mamy:

$$\frac{1}{1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Przykład z  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

W przypadku  $0\infty$  sprowadzamy wyrażenie do postaci  $\left[\frac{0}{0}\right]$  lub  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{\sin x} = [0\infty] \stackrel{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Regułę l'Hospitala możemy także stosować kilkakrotnie, dopóki nie otrzymamy obliczalnej granicy, na przykład:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos x - \cosh x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-\sin x - \sinh x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{-\cos x - \cosh x} = \frac{2}{-1 - 1} = -1$$