

Liczba e

Oznaczenie wprowadził szwajcarski matematyk Leonard Euler, a jej przybliżoną wartość obliczył Daniel Bernoulli. Liczba e jest to podstawa logarytmu naturalnego.

Liczba e w przybliżeniu wynosi:

$$e \approx 2.718281828458563411277850606202642376785584483618617451918618203..$$

Definicja:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Można łatwo dowieść że ciąg zdefiniowany tak:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Jest rosnący. Oto dowód: z dwumianu Newtona mamy

$$a_n = 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{3!} + \dots + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)}{n!}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1 - \frac{1}{n+1}}{2!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)}{3!} + \dots + \\ &+ \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)}{n!} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Zatem (co widać od razu):

$$a_n < a_{n+1}$$

Równie łatwo dowieść że ciąg ten jest ograniczony. Dowód polega na odpowiednim ograniczeniu z góry i wygląda tak (używamy wzoru na dwumian Newtona):

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n = \\
&= 1 + 1 + \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n < \\
&< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \\
&= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3
\end{aligned}$$

Zatem:

$$a_n < 3$$

Tu padnie pytanie wykładowcy: i co z tego wynika? Dowody podane powyżej różnią się od tych na wykładzie i bardzo dobrze:) MN

Suma szeregu

Jako suma szeregu, e jest określana przez

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

gdzie $n!$ jest silnią liczby n .

Poniższe wiadomości nie będą potrzebne przy odpowiedzi na pytanie ``liczba e'' MN

Przy pomocy całki

Liczbę e można także zdefiniować jako jedyną liczbę rzeczywistą taką że:

$$\int_1^e \frac{1}{t} dt = 1$$

(to znaczy, że liczba e to taka, że pole powierzchni pod hiperbolą $f(t) = 1/t$ od 1 do e jest równe 1).

Właściwości

1) Liczba e jest niewymierna Można tego dowieść w następujący sposób:

Wiemy, że e to liczba niecałkowita z przedziału $(2,3)$. Załóżmy zatem, że e jest liczbą wymierną:

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

$$e = \frac{l}{m} \quad m \geq 2$$

Tworzymy teraz następujący ciąg:

$$b_{m+k} = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!} + \dots + \frac{1}{(m+k)!} =$$

$$= b_m + \frac{1}{(m+1)!} + \dots + \frac{1}{(m+k)!}$$

$$m! b_{m+k} = m! b_m + \frac{1}{(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{1}{(m+1)\dots(m+k)} =$$

$$= m! b_m + c_k$$

Łatwo teraz zauważyć następujący fakt:

$$l \cdot (m-1)! = m! e = \lim_{k \rightarrow \infty} (m! b_{m+k}) = m! b_m + \lim_{k \rightarrow \infty} (c_k) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (c_k) \in \mathbb{N}$$

Oszacujmy zatem ciąg :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(m+1)} &\leq c_k = \frac{1}{(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \dots + \frac{1}{(m+1)\dots(m+k)} = \\
&= \frac{1}{(m+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{(m+2)} + \dots + \frac{1}{(m+2)\dots(m+k)} \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{(m+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{k-1}} \right) = \\
&= \frac{1}{(m+1)} \cdot \frac{4}{3} < \frac{2}{(m+1)} < 1 \\
0 < \lim_{k \rightarrow \infty} (c_k) < 1 &\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} (c_k) \notin \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Uzyskana sprzeczność dowodzi iż liczba e nie jest wymierna.

2) Jest liczbą przestępną, tzn. nie jest pierwiastkiem żadnego wielomianu o współczynnikach całkowitych

3) e jest podstawą takiej funkcji wykładniczej, że styczna do jej wykresu w punkcie $(0, 1)$ ma współczynnik kierunkowy równy 1

4) e jest podstawą takiego logarytmu, że styczna do wykresu funkcji logarytmicznej o tej podstawie w punkcie $(1, 0)$ ma współczynnik kierunkowy równy 1.

5) Pochodna funkcji $(e^x)' = e^x$

Czasami stosuje się oznaczenie $ex = \exp(x)$ (exponent to po angielsku wykładnik, po łacinie wykładnik to *exponens*, *exponentis*).

6) Całka funkcji $\int e^x dx = e^x + C$, gdzie C jest dowolną stałą całkowania.

7) Z definicji wprost wynika, że funkcja wykładnicza o podstawie e jest odwrotną do logarytmu naturalnego:

$$\begin{aligned}
\ln e^x &= x \\
e^{\ln x} &= x
\end{aligned}$$

8) Jest jednym z elementów wzoru Eulera (zwanego też "najpiękniejszym wzorem matematyki"), wiążącej e z innymi słynnymi liczbami: jednostką urojoną i , π , jednością i zerem:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$