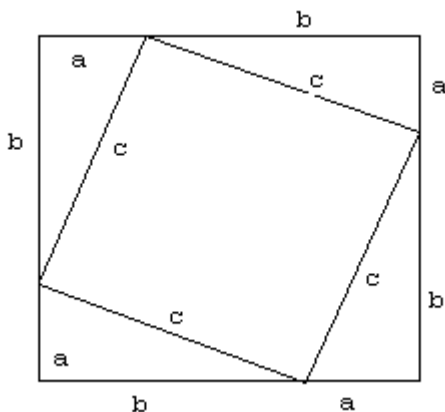
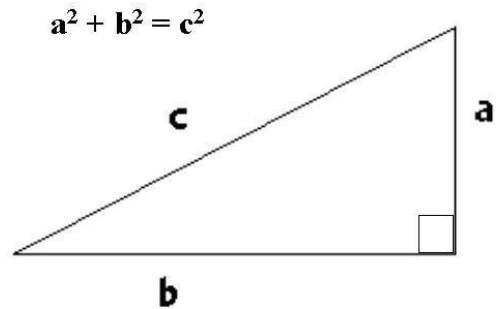


Matematyka I - powtórzenie do egzaminu

Miara łukowa kąta, definicje funkcji trygonometrycznych, twierdzenie Pitagorasa, jedynka trygonometryczna

Twierdzenie Pitagorasa

W VI wieku p.n.e. grecki matematyk Pitagoras zauważył, że w dowolnym trójkącie prostokątnym suma pól kwadratów zbudowanych z przyprostokątnych jest równa polu kwadratowi zbudowanego z przeciwprostokątnej tego trójkąta. Jest to jedno z podstawowych twierdzeń geometrii euklidesowej, które dokładnie brzmi: „w dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej tego trójkąta” i jest ilustrowane rysunkiem.



Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić geometrycznie, analizując rysunek, na którym każdy bok kwadratu podzielono (tak samo) w pewnych punktach na odcinki a i b , a następnie te punkty połączono, tworząc kolejny kwadrat o boku c . Pole dużego prostokąta można zapisać jako:

$$P = (a + b)^2$$

ale także jako sumę pól czterech trójkątów i mniejszego kwadratu:

$$P = c^2 + 4 * \frac{1}{2} ab$$

Porównując oba równania:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= c^2 + 4 * \frac{1}{2} ab \\ a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \quad // - 2ab \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

co należało udowodnić.

Definicje funkcji trygonometrycznych

Funkcje trygonometryczne to funkcje wyrażające stosunki między długościami boków trójkąta prostokątnego względem miar jego kątów, których zdefiniowanie ułatwia opis wielu zjawisk i zagadnień. Cztery

główne funkcje trygonometryczne to sinus, cosinus, tangens i cotangens. Dla pewnego kąta α mamy odpowiednio $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$. Określono je w następujący sposób.

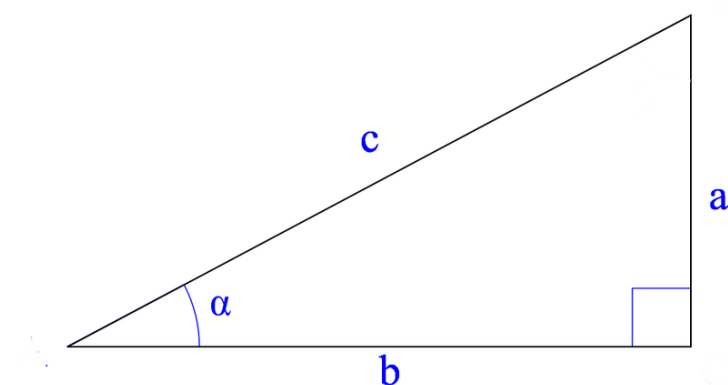
Sinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi do przeciwprostokątnej.

Cosinusem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do danego kąta do przeciwprostokątnej.

Tangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi do przyprostokątnej przyległej do danego kąta.

Cotangensem kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do danego kąta do przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi.

Powyższe definicje ilustruje rysunek:



$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{a}{b} \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{b}{a}\end{aligned}$$

Miara łukowa kąta

Do porównywania kątów z funkcjami trygonometrycznymi, rysowania wykresów tych funkcji czy obliczeń fizycznych miara kąta w stopniach byłaby niewygodna, ponieważ np. wykres funkcji na dwóch osiach miałby różne jednostki – kąt w stopniach i jego sinus (jako wartość bezwymiarową). Aby i kąt wyrazić poprzez wartość bezwymiarową, wprowadzono miarę łukową kąta, która definiuje go poprzez długość zakreślonego łuku przez okrąg o promieniu 1. I tak kąt pełny stanowi cały okrąg czyli:

$$\alpha = 2\pi = 360^\circ$$

Formalnie mówimy, że kąt w mierze łukowej ma np. $\pi/3$ radianów [rad](radian jako jednostka bezwymiarowa), ale ogólnie stosujemy notację $\alpha = \pi/3$ bez pisania „jednostki”.

Inne kąty są odpowiednimi wielokrotnościami π , jak w szczególności:

$$\pi = 180^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\frac{\pi}{6} = 30^\circ$$

Z powyższych wnioskujemy, że 1 radian to miara kąta opartego na łuku, którego długość jest równa długości promienia okręgu:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ // : 2\pi$$

$$1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Stąd mając w radianach kąt α możemy obliczyć odpowiadający mu w stopniach kąt β (jako wielokrotność radiana):

$$\beta = 1 \text{ rad} * \alpha = \frac{180 * \alpha}{\pi}$$

Analogicznie:

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ // : 360$$

$$\frac{2\pi \text{ rad}}{360} = 1^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi \text{ rad}}{180}$$

Stąd mając w stopniach kąt β możemy obliczyć odpowiadający mu w radianach kąt α :

$$\alpha = 1^\circ * \beta = \frac{\pi * \beta}{180}$$

Jedynka trygonometryczna

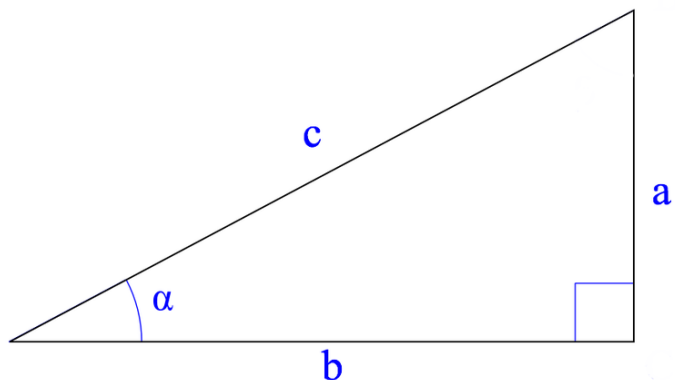
Można zauważyć, że w danym trójkącie prostokątnym zachodzi (z twierdzenia Pitagorasa):

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Stąd, dzieląc obustronnie przez c^2 mamy:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Ponieważ (z definicji funkcji trygonometrycznych):



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

to

$$\frac{a^2}{c^2} = \sin^2\alpha$$

$$\frac{b^2}{c^2} = \cos^2\alpha$$

zatem z równości

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

wynika, że

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Taka tożsamość trygonometryczna nazywana jest jedynką trygonometryczną.

Mateusz Sitarz 307297