Wielomiany i ich pierwiastki, podzielność wielomianów,

funkcje wymierne, twierdzenie Bezoute'a.

1. Funkcje wymierne

1.1 Definicja

Funkcja wymierna to iloraz dwóch wielomianów jednej zmiennej:

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, Q(x) \neq 0$$

1.2. Dziedzina funkcji wymiernej

Dziedziną funkcji wymiernej jest zbiór liczb rzeczywistych bez miejsc zerowych wielomianu Q(x) w mianowniku:

$$D_f = \{x \in R : Q(x) \neq 0\}$$

2. Informacje podstawowe o wielomianach

2.1 Definicja wielomianu stopnia n jednej zmiennej rzeczywistej

Wielomian jest to funkcja postaci:

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

$Gdzie : a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in R$, $a_n \in R \setminus \{0\}$, $n \in N$, $x \in R$

2.2 Pojęcia dotyczące wielomianów

2.2.1 Wyraz wolny wielomianu to współczynnik a_0:

$$W(0) = a_0$$

2.2.2 Wykładnik n to stopień wielomianu:

$$W(x) = 3x^5 - 5x^2 \quad degW(x) = 5$$

2.2.3 Wartość wielomianu w punkcie x_0 jest to liczba:

$$W(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + ... + a_1 x_0 + a_0$$

2.2.4 Pierwiastek wielomianu to miejsce zerowe wielomianu:

$$(x_0 - pierwiastekwielomianu) \Leftrightarrow (W(x_0) = 0)$$

2.2.5 Wielomian jest uporządkowany gdy jego wyrazy są uporządkowane według malejących/rosnących potęg.

3. Działania na wielomianach

3.1 Równość wielomianów:

$F(x) = G(x) \Leftrightarrow \wedge_{p \in R} F(p) = G(p)$ (Dwa wielomiany są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy dla każdej wartości p zmiennej rzeczywistej x przyjmują te same wartości)

3.2 Dzielenie wielomianów

3.2.1 Twierdzenie o dzieleniu wielomianów z resztą:

Niech V(x) wielomian stopnia n i D(x) wielomian stopnia m $(-\infty < m \leq n)$ Wtedy istnieją wielomiany W(x) i r(x), gdzie r(x) jest wielomianem stopnia mniejszego niż m, takie, że:

V(x)=W(x)·D(x)+r(x)

Wielomiany W(x) i r(x) są wyznaczone jednoznacznie.

Wielomian V(x) jest podzielny przez $D(x) \Leftrightarrow r(x) = 0$

3.2.2 Twierdzenie o rozkładzie wielomianu na czynniki:

Jeśli $p_1, \dots, p_n$ są pierwiastkami wielomianu P(x) stopnia n, to P(X) da się rozłożyć na czynniki: $P(x) = a(x - p_1)(x - p_2)...(x - p_n)$ Każdy wielomian $P(x) \neq 0$ jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego.

3.2.3 Twierdzenie Bezoute'a o podzielności wielomianu P(x) przez dwumian x-p:

Wielomian P(x) jest podzielny przez x-a wtedy i tylko wtedy gdy P(a)=0

Dowód:P(x)=COŚ(x) · (x-a)+c

P(a)=COŚ(x) · (a-a)+c

P(a)=c=r(x)=0

3.2.4 Twierdzenie o reszcie z dzielenia wielomianu P(x) przez dwumian x-a:

Reszta r z dzielenia Wielomianu P(x) przez dwumian x-a jest równa r=P(a).

Twierdzenie to pozwala obliczyć resztę z dzielenia wielomianu P(x) przez dwumian x-a bez wykonywania dzielenia, na przykład reszta z dzielenia wielomianu P(x) przez x-3 wynosi P(3) a przez x+2 wynosi P(-2)

3.3 Pierwiastki wielomianów

3.3.1 Twierdzenie o krotności pierwiastka wielomianu:

Liczba a jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian P(x) jest podzielny przez $(x-a)^k$, a nie jest podzielny przez $(x-a)^{k-1}$

3.3.2 Twierdzenie o związku stopnia wielomianu z liczbą jego pierwiastków:

Każdy niezerowy wielomian stopnia n może mieć co najwyżej n pierwiastków

3.3.3 Twierdzenie o pierwiastkach całkowitych:

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi i $a_0 \neq 0$.

Jeśli rozwiązaniem tego równania jest liczba całkowita, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego.

Dowód:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0 = 0$$

$$c(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \ldots + a_1) = -a_0$$

$$a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \ldots + a_1 = \frac{-a_0}{c}$$

Liczba $a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \ldots + a_1 =$ jest całkowita z założenia.

Wynika stąd, że $\frac{a_0}{c}$ też jest liczbą całkowitą, a więc liczba a_0 jest podzielna przez c

3.3.4 Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych:

Załóżmy, że w równaniu wielomianowym:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

wszystkie współczynniki są liczbami całkowitymi.

Pierwiastków wymiernych wielomianu szukamy pośród liczb postaci $\frac{p}{q}$ gdzie p jest podzielnikiem a_0, a q jest podzielnikiem wyrazu przy najwyższej potędze.

3.3.5 Twierdzenie o istnieniu pierwiastka wielomianu stopnia nieparzystego

Każdy wielomian stopnia nieparzystego o współczynnikach rzeczywistych ma co najmniej jeden pierwiastek rzeczywisty