

# Granica ciągu. Twierdzenia o granicy sumy, iloczynu i ilorazu ciągów

Michał Kuć i Maciej Nieszporski

7 stycznia 2011

## 1 Definicja granicy ciągu “!”

Liczbę  $g$  nazywamy granicą ciągu (nieskończonego)  $a_n$  jeśli:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n - g| < \varepsilon$$

Słownie:

Dla każdego  $\varepsilon$  większego od 0, istnieje takie  $N$  należące do zbioru liczb naturalnych, że dla każdego  $n$  większego od  $N$  spełniona jest nierówność:

$$|a_n - g| < \varepsilon$$

Granicę  $g$  ciągu  $a_n$  przy  $n \rightarrow \infty$  oznaczamy jako  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ .

Rozszyfrowanie definicji granicy ciągu polega przede wszystkim na zrozumieniu czym jest  $\varepsilon$ .  $\varepsilon$  to dowolna liczba większa od 0, która wyznacza “odległość” od wartości granicy ciągu. Jeśli ciąg posiada granicę, to wraz z dążeniem kolejnych wyrazów do nieskończoności (w opisywanym przypadku), ich wartości “zbliżają się” do danej granicy. Istotą definicji granicy ciągu jest wypowiedzenie co to znaczy “zbliżać się do czegoś”. Liczba  $N$  jest numerem granicznego wyrazu ciągu, takim że dla kolejnych wyrazów ciągu ( $n > N$ ),  $|a_n - g| < \varepsilon$  będzie mniejsza od  $\varepsilon$  ( $N$  należy do zbioru liczb naturalnych indeksy wyrazów ciągu są liczbami naturalnymi). Zapis  $|a_n - g| < \varepsilon$  oznacza tyle, że skoro ciąg  $a_n$  ma granicę  $g$ , to różnica  $a_n - g$  będzie co raz “bliższa” 0.

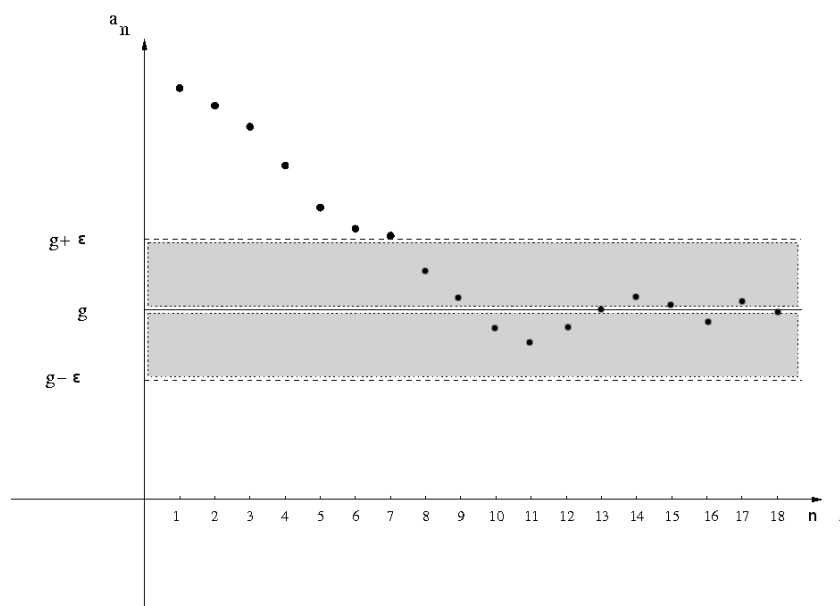
Ciągi mające granice nazywa się zbieżnymi, a pozostałe – rozbieżnymi.

### 1.1 W którym wykładowca się wtrąca.

Chyba przestałem rozumieć czym jest  $\varepsilon$ . Spróbujmy inaczej. Paskiem o grubości  $2\varepsilon$  nazwijmy zbiór  $\mathbb{R}_+ \times ]g - \varepsilon, g + \varepsilon[$  na wykresie ciągu (szary obszar na rysunku 1).  $\varepsilon$  decyduje więc o grubości paska. Definicję granicy możemy teraz wypowiedzieć następująco:

Mówimy że  $g$  jest granicą ciągu gdy choćby nie wiem jak cienki pasek wziąć to począwszy od pewnego miejsca  $N$  wszystkie wyrazy ciągu i tak znajdą się w pasku. Na rysunku 1  $N = 7$ .

Ten ustęp można opuścić, wykładowcę korci by go wyciąć.



Rysunek 1:

## 2 Podstawowe działania algebraiczne na ciągach i ich granicach

Niech dane będą dwa ciągi **zbieżne**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = h$$

### 2.1 Granica sumy ciągów “3”

Udowodnię, że suma granic ciągów jest równa granicy sumy ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g + h = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$$

Wiedząc, że  $a_n$  oraz  $b_n$  posiadają granice, możemy powiedzieć, że od pewnego miejsca, powiedzmy  $N$ , zachodzi:

$$\begin{cases} |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

$$|a_n - g| + |b_n - h| < \varepsilon.$$

Stosując nierówność trójkąta mamy

$$|(a_n + b_n) - (g + h)| \leq |a_n - g| + |b_n - h| < \varepsilon.$$

Wynika stąd, że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n + b_n - (g + h)| < \varepsilon$$

a to oznacza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = g + h.$$

## 2.2 Granica iloczynu ciągów “4”

Udowodnię, że suma granic ciągów jest równa granicy sumy ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Przypominam, że zakładamy iż granice po prawej stronie równości istnieją. Mamy dowieść, że granica po lewej stronie istnieje i wynosi  $g \cdot h$  tzn.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n b_n - gh| < \varepsilon.$$

W tym celu zapiszmy  $|a_n b_n - gh|$  jako

$$|a_n b_n - gh| = |a_n b_n - a_n h + a_n h - gh| = |a_n||b_n - h| + |h||a_n - g|$$

i dalej używając nierówności trójkąta

$$|a_n b_n - a_n h + a_n h - gh| \leq |a_n(b_n - h) + h(a_n - g)| = |a_n||b_n - h| + |h||a_n - g|.$$

Ciąg  $a_n$  jest zbieżny jest więc ograniczony oznacza to, że istnieje takie  $A$ , że dla każdego  $n$  naturalnego zachodzi  $|a_n| < A$ . Niech  $M$  oznacza większą z liczb  $A$  i  $|h|$  ( $M$  jest dodatnie). Mamy wtedy

$$|a_n||b_n - h| + |h||a_n - g| \leq M(|b_n - h| + |a_n - g|).$$

Ponieważ ciągi  $a_n$  i  $b_n$  są zbieżne od pewnego miejsca, powiedzmy  $N$ , zachodzi

$$|b_n - h| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |a_n - g| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

czyli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N |a_n b_n - gh| < M(|b_n - h| + |a_n - g|) < \varepsilon.$$

A to oznacza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = gh.$$

## 2.3 Granica ilorazu ciągów “5”

Uwaga na wykładzie dowód był nieco inny. Niech dane będą ciągi zbieżne  $a_n$  oraz  $b_n$ , których granice odpowiednio wynoszą  $g$  i  $h$ . O  $h$  zakładamy, że jest różne od zera. Udowodnimy najpierw, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Rozważymy jedynie przypadek gdy  $h < 0$  (przypadek  $h > 0$  dowodzi się analogicznie).

Zgodnie z definicją granicy ciągu dla każdego  $\varepsilon > 0$  dla dostatecznie dużych  $n$ , większych powiedzmy od  $N$ , zachodzi

$$h - \varepsilon < b_n < h + \varepsilon.$$

W szczególności biorąc  $\varepsilon = -\frac{h}{2}$ , od pewnego miejsca mamy

$$\frac{3h}{2} < b_n < \frac{h}{2}$$

a to oznacza, że

$$|b_n| > \frac{|h|}{2}.$$

Dzięki temu, że  $h \neq 0$  mamy

$$\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|h|}.$$

Używając ostatniej nierówności oszacujmy teraz różnicę:

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{h} \right| = \left| \frac{h - b_n}{hb_n} \right| = \frac{|h - b_n|}{|h||b_n|} < \frac{2|b_n - h|}{|h|^2}$$

ale ciąg  $b_n$  ma granicę  $h$  tzn. od pewnego miejsca powiedzmy  $N_1$  zachodzi również (wybieramy takie  $N_1$  by  $N_1 > N$ )

$$|b_n - h| < \frac{\varepsilon|h|^2}{2}$$

a to oznacza, że

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{h} \right| < \frac{2|b_n - h|}{|h|^2} < \varepsilon.$$

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{h} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Dowód zakończymy wykozystując wiadomości na temat granicy iloczynu ciągów:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \cdot \frac{1}{b_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$