

Kryteria d'Alemberta i Cauchyego dla ciągów

Bartosz Jura

20 stycznia 2011

1 KRYTERIUM D'ALEMBERTA DLA CIĄGÓW

Niech a_n ciąg o wyrazach dodatnich.

Jeśli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Jeśli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

natomiast gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g = 1$$

to kryterium nie działa.

Dowód dla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1 :$$

Istnieje liczba q taka, że $1 < q < g$. Od pewnego miejsca, powiedzmy N :

$$1 < q < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Zachodzi więc:

$$q < \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_N q < a_{N+1}$$

$$q < \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}$$

$$q^2 < \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$q^2 a_N < a_{N+2}$$

$$q < \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}$$

$$q^3 < \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$q^3 a_N < a_{N+3}$$

$$q^k a_N < a_{N+k}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_N q^k = a_N \lim_{k \rightarrow \infty} q^k = \infty,$$

bo a_N jest ustalonym wyrazem ciągu a ciąg geometryczny ma granicę ∞ dla $q > 1$, gdzie skorzystałem z faktu, że:

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g > 0$

i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n b_n = \infty$

Z faktu, że $\lim_{k \rightarrow \infty} a_N q^k = \infty$ i tego że począwszy od N zachodzi $a_N q^k < a_{N+k}$ wyciągamy wniosek, że $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = \infty$ czyli:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Dowód dla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1 :$$

Istnieje liczba q taka, że $1 > q > g$. Od pewnego miejsca, powiedzmy N :

$$1 > q > \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Mamy:

$$q > \frac{a_{N+1}}{a_N}$$

$$a_N q > a_{N+1}$$

$$\begin{aligned} q &> \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \\ q^2 &> \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ q^2 a_N &> a_{N+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q &> \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \\ q^3 &> \frac{a_{N+3}}{a_{N+2}} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \frac{a_{N+1}}{a_N} \\ q^3 a_N &> a_{N+3} \end{aligned}$$

$$q^k a_N > a_{N+k} > 0$$

$q^k a_N \rightarrow 0$, więc, na mocy twierdzenia o trzech ciągach, także $a_{N+k} \rightarrow 0$

Wniosek:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

UWAGA

By stosować to kryterium nie trzeba liczyć granicy. Wystarczy pokazać, że od pewnego miejsca:

$$1 < g \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (\text{lub } 1 > g \geq \frac{a_{n+1}}{a_n}).$$

W szczególności granica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ może nie istnieć (lub nie umiemy jej obliczyć) istotne jest czy potrafimy ją oszacować z dołu przez liczbę większą od 1 (lub z góry przez liczbę mniejszą od 1). Wtedy, na podstawie powyższego dowodu mamy że:

$$a_n \rightarrow \infty \quad (\text{lub } a_n \rightarrow 0)$$

Przykład:

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \frac{1}{n} = 2 > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

2 KRYTERIUM CAUCHY'EGO DLA CIĄGÓW

Niech a_n ciąg o wyrazach nieujemnych.

Jeśli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

natomiast gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g = 1$$

to kryterium nie działa.

Dowód dla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g > 1$$

Istnieje liczba q taka, że $1 < q < g$. Od pewnego miejsca, powiedzmy N :

$$\begin{aligned} \sqrt[N]{a_N} &> q \\ \sqrt[N+k]{a_{N+k}} &> q \\ a_{N+k} &> q^{N+k} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Wniosek:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

Dowód dla:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = g < 1$$

Istnieje liczba q taka, że $1 > q > g$. Od pewnego miejsca, powiedzmy N :

$$\begin{aligned} \sqrt[N]{a_N} &< q \\ \sqrt[N+k]{a_{N+k}} &< q \\ 0 \leq a_{N+k} &< q^{N+k} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Wniosek (na mocy twierdzenia o trzech ciągach):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{N+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Przykład:

$$a_n = \frac{2^n}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}} = 2 > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$