

Twierdzenie sinusów

Treść twierdzenia:

W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta naprzeciw tego boku jest stały

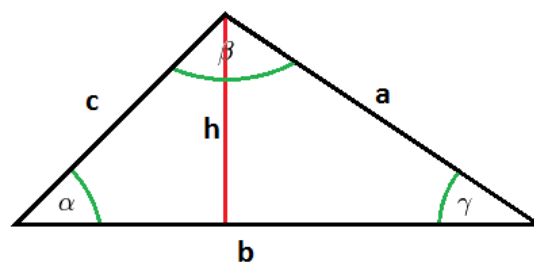
Przedstawia się to następująco:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Dowód:

Zgodnie ze wzorem na pole trójkąta:

$$P = \frac{1}{2}bh$$
$$\sin\alpha = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot \sin\alpha$$



Otrzymujemy:

$$P = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha$$

Wyznaczając podobne równania dla pozostałych kątów mamy:

$$P = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}ac \cdot \sin\beta$$

Dzielimy każde z wyrażeń przez $a \cdot b \cdot c$ i mnożąc przez 2 otrzymujemy:

$$\frac{2P}{abc} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b}$$

Biorąc odwrotności każdego wyrażenia mamy udowodnione twierdzenie.

Inny dowód (bazując na tym samym trójkącie co powyżej):

$$\sin\alpha = \frac{h}{c} \text{ oraz } \sin\gamma = \frac{h}{a}$$

Eliminujemy h :

$$c \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\gamma$$

Dzieląc obie strony przez $\sin\alpha \cdot \sin\gamma$ otrzymujemy:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Jeśli zmienimy wierzchołek, z którego opuszczamy wysokość otrzymamy pozostałe dwie równości.

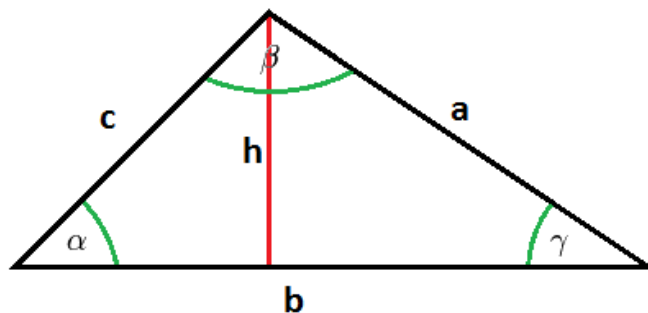
Twierdzenie cosinusów

Treść twierdzenia:

W dowolnym trójkącie, kwadrat długości dowolnego boku jest równy sumie kwadratów długości pozostałych boków, pomniejszonej o podwojony iloczyn długości tych boków i cosinusa kąta zawartego między nimi.

Co przedstawia się (korzystając z rysunku):

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$



W przypadku trójkąta prostokątnego gdzie γ jest kątem prostym otrzymujemy twierdzenie Pitagorasa gdyż $\cos 90^\circ$ jest równy 0 czyli:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

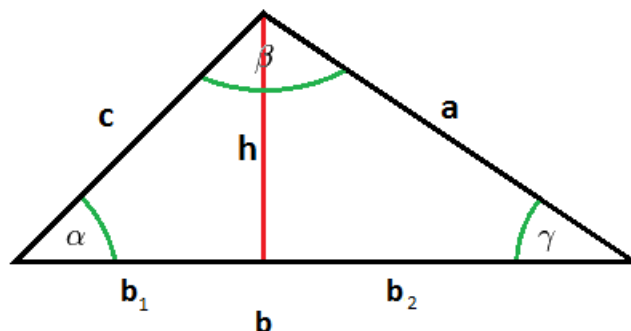
Dowód twierdzenia cosinusów:

Opuśćmy wysokość na bok b . Dzieli ona go na b_1 i b_2

Wyznamy wzory na $\cos \gamma$ i $\sin \gamma$:

$$\cos \gamma = \frac{b_2}{a} \rightarrow b_2 = a \cdot \cos \gamma$$

$$\sin \gamma = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot \sin \gamma$$



Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy wzór na c^2 :

$$c^2 = h^2 + b_1^2$$

Ponieważ $b = b_1 + b_2$ stąd $b_1 = b - b_2$, podstawiając do wzoru pitagorasa mamy:

$$c^2 = h^2 + (b - b_2)^2$$

Wstawiamy przekształcone wyznaczone powyżej wzory na h i b_2 i obliczamy:

$$c^2 = (a \cdot \sin \gamma)^2 + (b - a \cdot \cos \gamma)^2$$

$$c^2 = a^2 \cdot \sin^2 \gamma + b^2 - 2ba \cdot \cos \gamma + a^2 \cdot \cos^2 \gamma$$

$$c^2 = a^2 \cdot (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ba \cdot \cos \gamma$$

Z jedynki trygonometrycznej $\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba \cdot \cos \gamma$$

Zmieniając wierzchołek, z którego opuszczamy wysokość możemy wyznaczyć pozostałe dwa równania:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

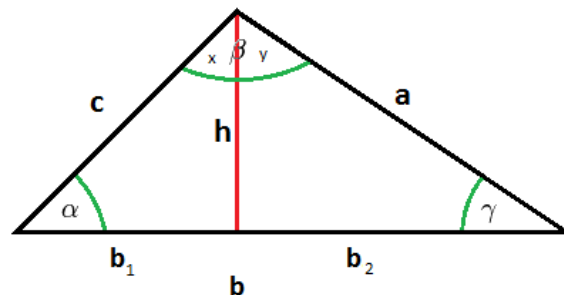
Koniec dowodu.

Cosinus sumy kątów:

Do obliczenia cosinusa sumy kątów wykorzystamy twierdzenia cosinusów i sinusów oraz rysunek pomocniczy

$$\beta = x + y$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$



Przekształcamy wzór aby otrzymać $\cos \beta$:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Ponieważ $\beta = x + y$, a $b = b_1 + b_2$ mamy:

$$\cos(x + y) = \frac{a^2 + c^2 - (b_1 + b_2)^2}{2ac}$$

Wyznaczamy b_1 i b_2 , a następnie podstawiamy do wzoru:

$$\sin x = \frac{b_1}{c} \rightarrow b_1 = c \cdot \sin x$$

$$\sin y = \frac{b_2}{a} \rightarrow b_2 = a \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \frac{a^2 + c^2 - (c \cdot \sin x + a \cdot \sin y)^2}{2ac}$$

$$\cos(x + y) = \frac{a^2 + c^2 - c^2 \sin^2 x - a^2 \sin^2 y - 2ac \cdot \sin x \sin y}{2ac}$$

$$\cos(x + y) = \frac{a^2(1 - \sin^2 y) + c^2(1 - \sin^2 x) - 2ac \cdot \sin x \sin y}{2ac}$$

Korzystamy z jedynki trygonometrycznej:

$$\cos(x + y) = \frac{a^2 \cos^2 y + c^2 \cos^2 x}{2ac} - \frac{2ac \cdot \sin x \sin y}{2ac}$$

$$\cos(x + y) = \frac{a^2 \cos^2 y}{2ac} + \frac{c^2 \cos^2 x}{2ac} - \sin x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \frac{a \cdot \cos^2 y}{2c} + \frac{c \cdot \cos^2 x}{2a} - \sin x \sin y$$

Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin y}{c} \rightarrow c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin y$$

$$c \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$c \cdot \cos x = a \cdot \cos y$$

Co po podstawieniu do naszego równania daje:

$$\cos(x + y) = \frac{c \cdot \cos x \cdot \cos y}{2c} + \frac{a \cdot \cos y \cdot \cos x}{2a} - \sin x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \frac{\cos x \cdot \cos y}{2} + \frac{\cos y \cdot \cos x}{2} - \sin x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos y \cos x - \sin x \sin y \text{ (Właśnie wyznaczyliśmy wzór cosinusa sumy kątów)}$$

Gdy $x = y$

$$\cos(x + x) = \cos 2x = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

Cosinus różnicy kątów wyprowadza się dokładnie tak samo, tylko znaki się zmieniają:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

Sinus sumy kątów:

Do wyprowadzenia wzoru na sinus sumy kątów użyjemy twierdzenia sinusów

$$\sin \beta = \sin(x + y)$$

$$\frac{\sin(x+y)}{b} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} = \mathbf{W}$$

Dla ułatwienia obliczeń wprowadzamy zmienną $\mathbf{W}$ i

mnożymy wszystkie wyrażenia przez b :

$$\sin(x + y) = \mathbf{W} \cdot b$$

Ponieważ $b = b_1 + b_2$

$$\sin(x + y) = \mathbf{W} \cdot (b_1 + b_2)$$

$$\sin(x + y) = \mathbf{W}b_1 + \mathbf{W}b_2$$

Wyznaczamy b_1 i b_2 i podstawiamy do wzoru:

$$b_1 = c \cdot \sin x$$

$$b_2 = a \cdot \sin y$$

$$\sin(x + y) = \mathbf{W}c \cdot \sin x + \mathbf{W}a \cdot \sin y$$

Z twierdzenia sinusów mamy:

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c} \rightarrow c \cdot \sin \alpha = a \cdot \sin \gamma$$

$$c \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$$

$$c \cdot \cos x = a \cdot \cos y$$

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{c} \text{ (co nadal jest równe zmiennej } \mathbf{W})$$

Wstawiając do obliczanego wzoru mamy:

$$\sin(x + y) = \frac{\cos y}{c} c \cdot \sin x + \frac{\cos x}{a} a \cdot \sin y$$

$$\sin(x + y) = \cos y \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin y \text{ (Co kończy wyprowadzanie wzoru sinusa sumy)}$$

Gdy $x = y$:

$$\sin(x + x) = \sin 2x = \cos x \cdot \sin x + \cos x \cdot \sin x = 2\cos x \sin x$$

Sinus różnicy kątów wyprowadza się tak samo, tylko znaki będą odwrotne:

$$\sin(x - y) = \cos y \sin x - \cos x \sin y$$

