

TWIERDZENIE O TRZECH CIĄGACH

Niech będą dane 3 ciągi liczb rzeczywistych (a_n) , (b_n) , (c_n)

Gdzie: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$,

Jeśli istnieje takie $N > 0$, że dla każdego $n > N$ zachodzi:

$$(1) \quad (a_n) \leq (b_n) \leq (c_n)$$

to ciąg (b_n) jest zbieżny i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.

DOWÓD:

Z założenia (i twierdzenia o ograniczoności ciągów zbieżnych*) wynika, że w dowolnie małym przedziale $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ leżą wszystkie wyrazy a_n (dla $n > N$) i wszystkie wyrazy c_n (dla $n > N$), więc wobec zależności (1): $(a_n) \leq (b_n) \leq (c_n)$, leżą w nim również wszystkie wyrazy b_n (dla $n > N$).

Zatem $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(*) Każdy ciąg zbieżny musi być ograniczony (tzn. wszystkie jego wyrazy muszą być zawarte w pewnym przedziale skończonym).

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, to w przedziale $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ dla dowolnie wybranego ε leżą wszystkie wyrazy a_n .

Gabriela Bernatowicz