

I Kolokwium z Matematyki I

Uwaga! Każde zadanie na osobnej kartce.

1. Udowodnij, że dla każdego n będącego liczbą naturalną zachodzi

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

2. Zbiór wektorów $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ tworzy bazę. Dla jakich wartości rzeczywistego parametru α zbiór $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3, \vec{f}_4)$ zadany przez $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_4$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$, $\vec{f}_4 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \alpha \vec{e}_3$ także tworzy bazę? W szczególnym przypadku dla $\alpha = 1$ znaleźć macierz przejścia z bazy f do bazy e oraz wyznaczyć współrzędne względem

bazy e wektora mającego w bazie f współrzędne $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_f$.

3. Rozpatrujemy podprzestrzeń $\mathbb{R}^3$ zadaną przez

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z = x + y \right\}.$$

Znaleźć:

- a) dowolną bazę A ,
- b) dowolną bazę ortonormalną A ,
- c) dowolny wektor jednostkowy w $\mathbb{R}^3$ ortogonalny do każdego wektora należącego do A ,
- d) pole równoległoboku rozpiętego przez znaleziony w punkcie c) wektor jednostkowy i

wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. Znajdź macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Rozwiąż nierówność

$$x^2 \leq \frac{-6x - 2}{x + 5}$$

6. Zadanie rezerwowe: Znajdź współczynnik przy x^{-4010} w rozwinięciu dwumianu Newtona $(x^3 + \frac{1}{x^2})^{2010}$.