

Trzecie kolokwium z Matematyki I

1. Oblicz następujące całki nieoznaczone

(a) $\int \left(\frac{1}{x+7} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$

(b) $\int x^2 \cos(7x) dx$

(c) $\int \frac{1}{x^2-2x+10} dx$

(d) $\int \operatorname{arctg}(7x) dx$

2. Czy ciąg a_n zadany rekurencyjnie

$$a_{n+1} = \frac{4a_n - 2}{a_n + 1}, \quad a_1 = 3$$

ma granicę? Jeśli tak znajdź ją.

3. Oblicz granice

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+n+1} \right)^{n+3}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\sin x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{\ln(1+x) - x}$

4. Udowodnij, że $\forall x \in \mathbb{R} : x \cos x - \sin x + x^2 \geq 0$

5. Podaj wzór Taylora-Maclaurina z resztą R_3 w postaci Lagrange'a dla funkcji $f(x) = \frac{e^{(x^2)}}{x+1}$