Zadania domowe z Matematyki I - Tożsamości i nierówności

Zadanie 1
Wykaż, że dowolnego parametru $a > 0$ zachodzi

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{ax}\right) + \operatorname{arctg}(ax) = \frac{\pi}{2} \quad \text{dla } x > 0$$

Zadanie 2
Wykaż, że

$$\ln(2+x) > \frac{\operatorname{arctg}(\mathrm{x}+1)}{2+x} \quad \text{dla } x > (-1)$$

Zadanie 3
Wykaż, że

$$2x\operatorname{arctg}(x) \geqslant \ln\left(1+x^2\right) \quad \text{dla } x > 0$$

Zadanie 4
Wykaż, że

$$\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{dla } x > 0$$

Zadanie 5
Wykaż, że

$$2x^6\operatorname{arctg}\left(x^2\right) \geqslant x^4 - \ln\left(1+x^4\right) \quad \text{dla } x \in R$$

Wskazówki
Ad. 1. Pokaż, że pochodna lewej strony jest równa zero. Ad. 2,3,4. Pokaż, że odpowiednia funkcja jest rosnąca. Ad 4. Skorzystaj z faktu, że $x > \sin(x)$ dla $x > 0$ Ad 5. Znajdź minimum odpowiedniej funkcji.