

Matematyka I, zadania domowe seria 16

Oblicz całki z funkcji wymiernych:

$$1. \int \frac{1}{t^4 + 5t^2 - 36} dt$$

$$2. \int \frac{x^9 + 4x^7 + x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + 1}{(x+1)(x^2+1)^3} dx$$

$$3. \int \frac{x^3 + x^2 + 7x - 1}{(x^2 - 1)^2(x+1)} dx$$

$$4. \int \frac{1}{x^5 - 1} dx$$

Podpowiedzi

1.

2. Rozkłada się na: $x^2 - x + 2 - \frac{x}{(x^2+1)^3} - \frac{1}{x+1}$ i dalej łatwo całkuje.

3. Rozkłada się na: $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+1)^3}$ i dalej łatwo całkuje.

4. Wskazówka: $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ można przedstawić jako $(x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$ gdzie $a = -2 \cos \frac{4\pi}{5}$, $b = -2 \cos \frac{2\pi}{5}$ (dlaczego?) a następnie znaleźć i rozwiązać równania na a, b wykorzystując równość $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 1)$. $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Rozkład na ułamki proste daje $\frac{1}{x^5-1} = \frac{1}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{5} \frac{ax+2}{x^2+ax+1} - \frac{1}{5} \frac{bx+2}{x^2+bx+1}$.