

Matematyka I, zadania domowe, seria 3

1. Zbiór wektorów $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ tworzy bazę. Czy zbiór $f = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ zadany przez $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 + 9\vec{e}_3$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3$ także tworzy bazę? Jeśli tak, to znaleźć macierze przejścia z bazy e do f oraz z f do e . Znaleźć współrzędne wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}_e$ w bazie f oraz wektora $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_f$ w bazie e .

2. Dla jakich wartości parametrów a , b i c wektory $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tworzą bazę przestrzeni 3-wymiarowej? W przypadku gdy $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ jest bazą, wyrazić w bazie e wektory (zapisane w bazie standardowej)

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_6 = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}.$$

3. Opisz podprzestrzeń najmniejszego wymiaru, do którego należą poniższe wektory

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ określamy podprzestrzenie

$$U = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad V = \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wykazać, że $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tzn. każdy wektor z przestrzeni $\mathbb{R}^4$ jest kombinacją liniową wektorów z przestrzeni U i V oraz $U \cap V = \{\vec{0}\}$.

5. Zdefiniować poniższe podprzestrzenie liniowe przy użyciu układów równań liniowych

$$V_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_2 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$V_3 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_4 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

6. Opisać następujące podprzestrzenie wektorowe: $V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}$, $V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = -2y \wedge y = z \right\}$

Jakie są wymiary tych podprzestrzeni?

7. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & b & 0 & \beta \\ 0 & 0 & c & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$. Dla jakich wartości parametrów istnieje macierz odwrotna?

8. Zapisać wektor $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ w bazie $e = (x^3 + x^2 + x + 1, x^2 + x + 1, x + 1, 1)$.