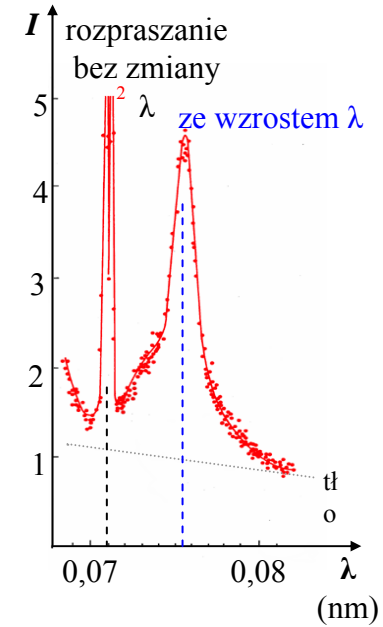
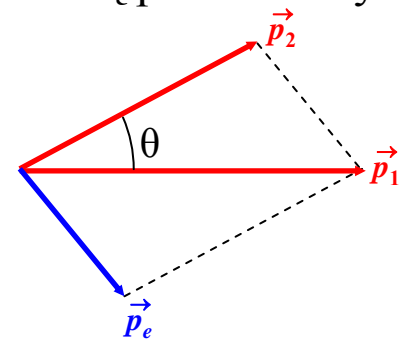
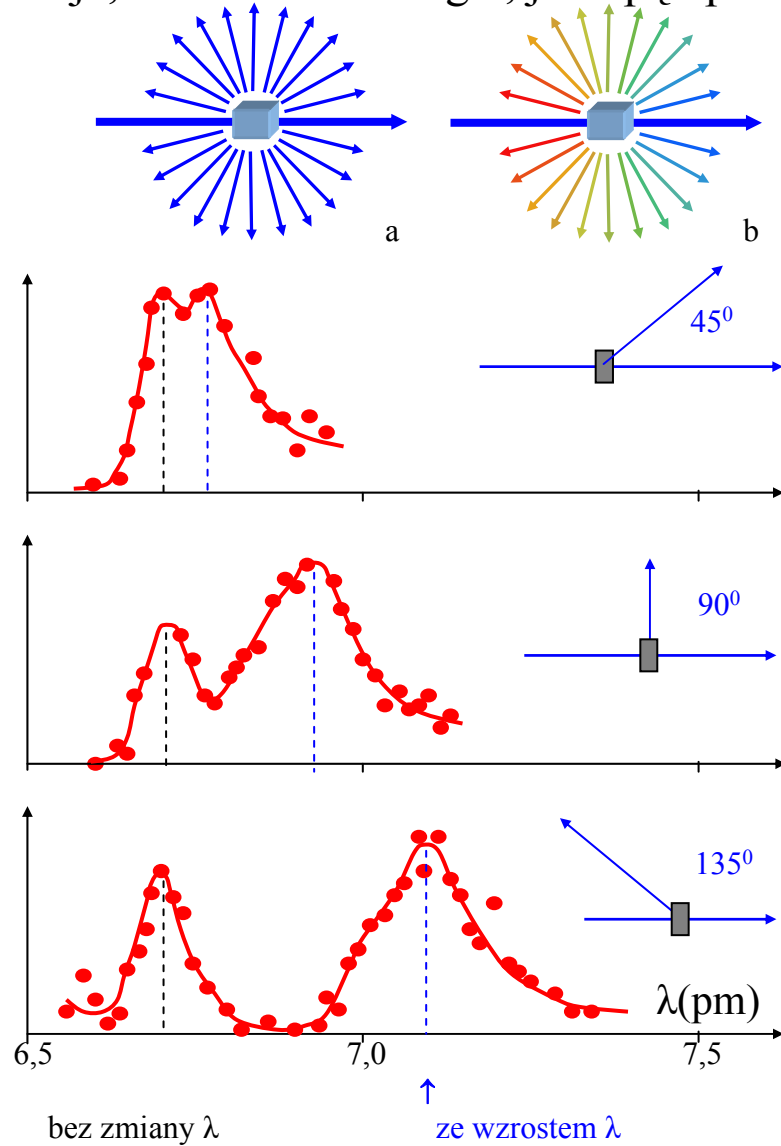


W 1916r. Einstein rozszerzył swoją koncepcję kwantów światła, przypisując im pęd.
 Fotonowi o energii $\hbar\omega$ odpowiada pęd $p = (\hbar\omega)/c = h/\lambda$

Efekt Comptona (1923r.) - rozpraszanie promieni X (10keV- kilka MeV) na elektronach –
 pokazuje, że zarówno energia, jak i pęd przekazywane są przez fotony.

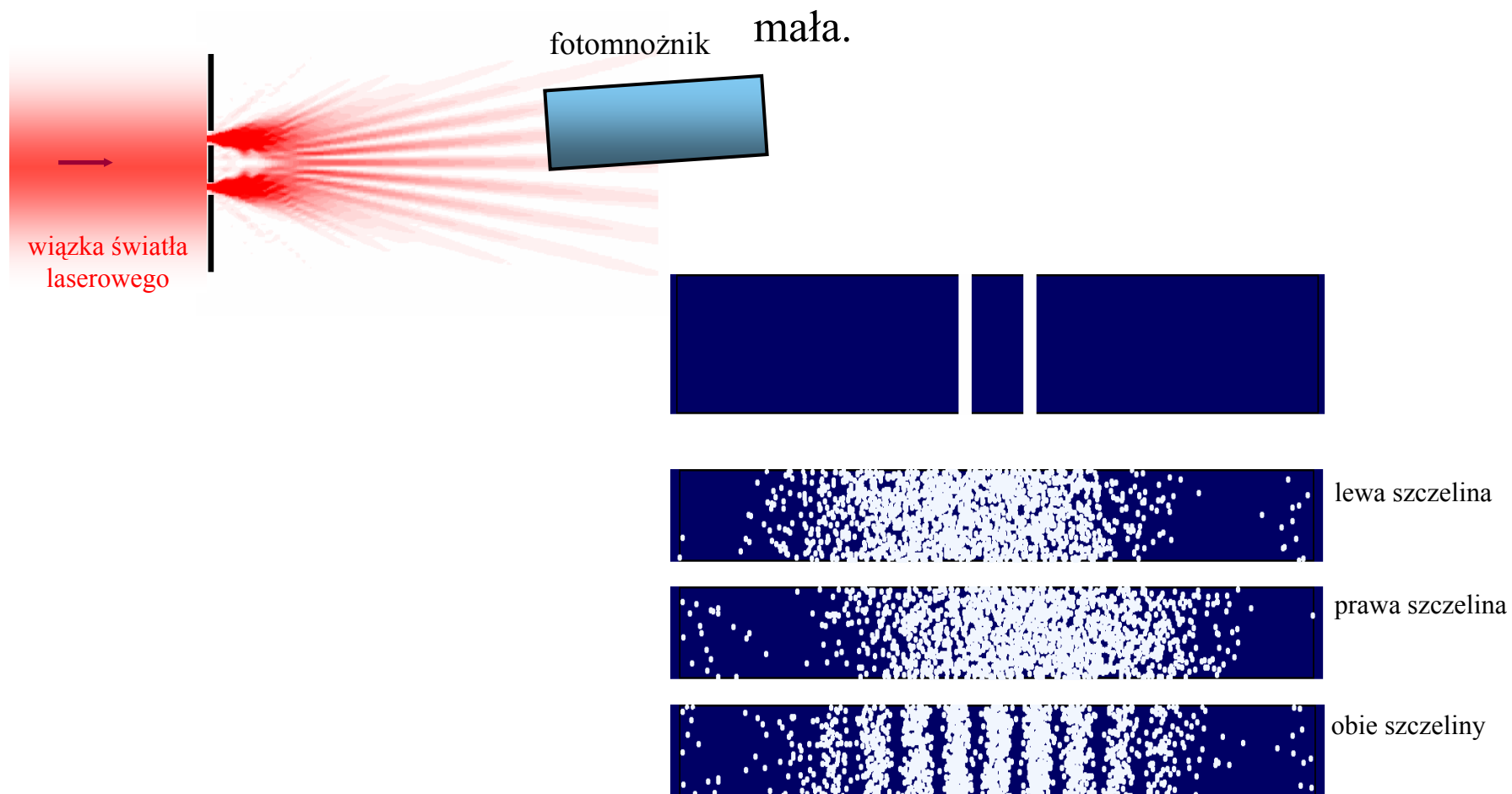


$$E_2 = \frac{E_1}{1 + \frac{E_1}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)}$$

Dualizm korpuskularno falowy

Doświadczenie Younga jeszcze raz:

dyfrakcja i interferencja światła na dwóch szczelinach w którym jako detektora używamy fotopowielacza z przelicznikiem elektronicznym. W doświadczeniu mierzymy **kat odchylenia** promieniowania od kierunku początkowego i **liczbę zliczeń** w określonym przedziale czasu, wskazaną przez przelicznik. Liczba ta zależy od położenia fotopowielacza. W „jasnych prążkach” jest duża, a w „ciemnych prążkach”





Fotony,obraz.nb

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia fotonu a amplituda fali elektromagnetycznej

Aby powyższe doświadczenie opisać, musimy wziąć pod uwagę obie natury promieniowania:

1. Nie sposób zrozumieć, dlaczego powstają poszczególne impulsy w fotopowielaczu, bez uwzględnienia **korpuskularnej** natury promieniowania.
2. Nie można zrozumieć, dlaczego powstają „prążki” bez uwzględnienia natury **falowej**.

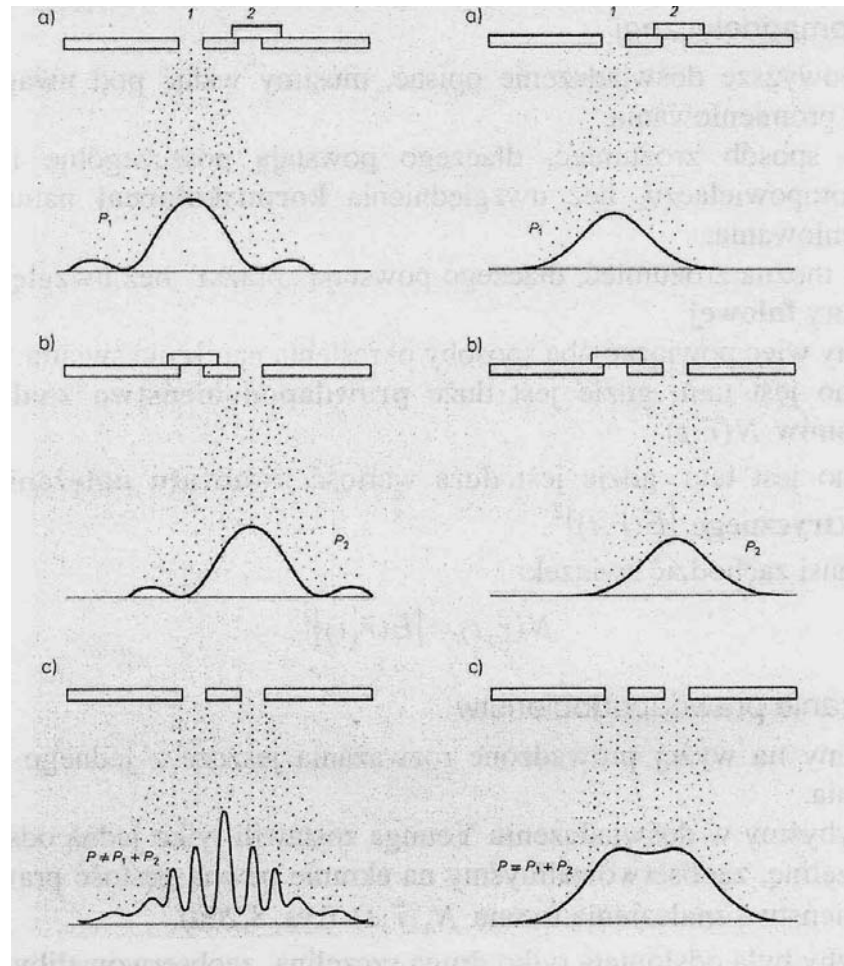
Musimy więc powiązać oba sposoby określenia natężenia światła:

Jasno jest tam, gdzie jest duże **prawdopodobieństwo znalezienia fotonów** $N(r,t)$

Jasno jest tam, gdzie jest duża wartość **kwadratu natężenia pola elektrycznego** $[E(r,t)]^2$

Stąd musi zachodzić związek:

$$N(r,t) \sim [E(r,t)]^2$$



język korpuskularny	tłumaczenie	język falowy
pęd fotonu \vec{p}	$\vec{p} = \hbar \vec{k}$	wektor falowy \vec{k}
energia fotonu E_f	$E_f = \hbar \omega$	częstość kołowa ω
gęstość prawdopodobieństwa znalezienia fotonu $N(\vec{r}, t)$	natężenie światła $N(\vec{r}, t) \propto [E(\vec{r}, t)]^2$	kwadrat funkcji falowej $[E(\vec{r}, t)]^2$

Podstawowe wzory mechaniki relatywistycznej

$$E = mc^2$$

$$p = mv$$

$$m = m_0 / (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Wynika stąd, że $E/p = c^2/v$ oraz $v = \frac{cp}{\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}}$

A zatem $E = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + c^2 p^2}$

Foton jest cząstką o zerowej masie spoczynkowej,
czyli $v = c$ oraz $E = cp$

Ponieważ $E = \hbar\omega$, zaś $p = \hbar k$, więc

$$\omega = ck$$

zależność dyspersyjna dla fotonu

Hipoteza de Broglie'a

W 1924r. Luis de Broglie wysunął hipotezę, że właściwości falowe mają wszystkie mikroobiekty (np. elektrony, protony), traktowane wcześniej jako cząstki.

Przyjął on, że dla cząstek z niezerową masą spoczynkową obowiązują analogiczne wzory jak dla fotonu:

$$E = \hbar\omega, \text{ zaś } \vec{p} = \hbar\vec{k}$$

Fale związane z cząstkami o niezerowej masie spoczynkowej nazywamy falami de Broglie.

$$E_r = c\sqrt{m_0^2 c^2 + p^2}$$

$$\hbar\omega = c\sqrt{m_0^2 c^2 + \hbar^2 k^2}$$

zależność dyspersyjna dla fal de Broglie:

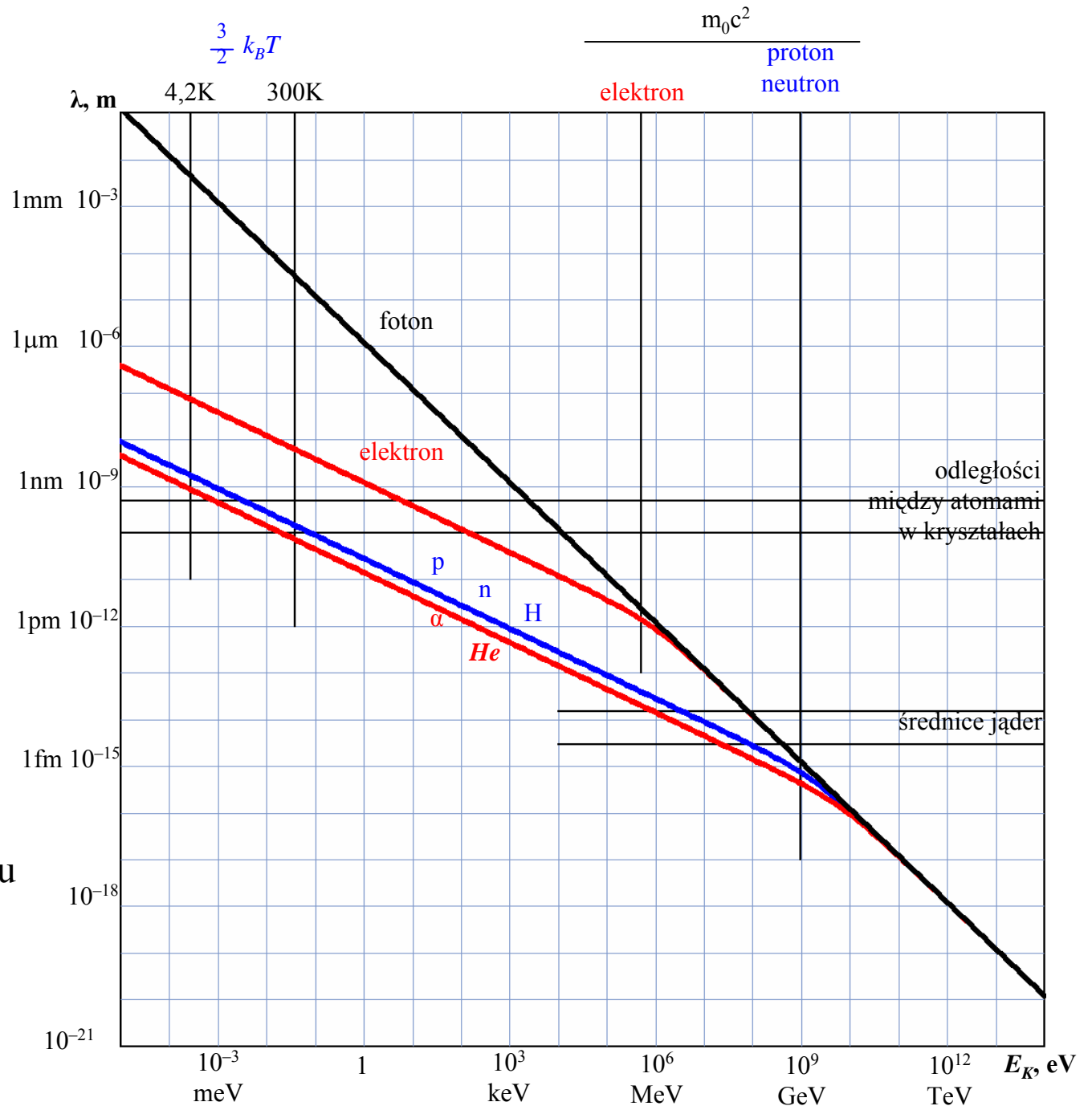
$$\omega = c\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + k^2}$$

Zależność długości fali od energii kinetycznej cząstki

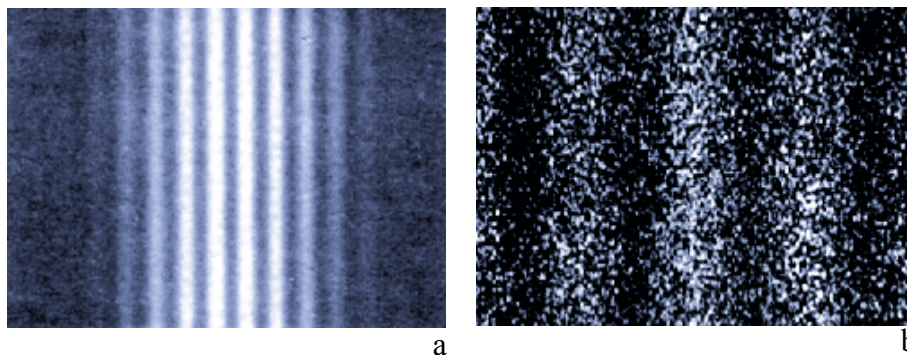
Warunek
wzmocnienia
dla interferencji:

$$\sin \alpha = n \frac{\lambda}{d}$$

$d = 10\mu\text{m}$, $\lambda \sim 0,1\text{nm}$,
wtedy przy odległości ekranu
 $L=1\text{m}$, prążki co $10\mu\text{m}$



Doświadczenia dyfrakcyjno-interferencyjne dla elektronów



dyfrakcja elektronów na dwóch szczelinach

Warunki eksperymentu:

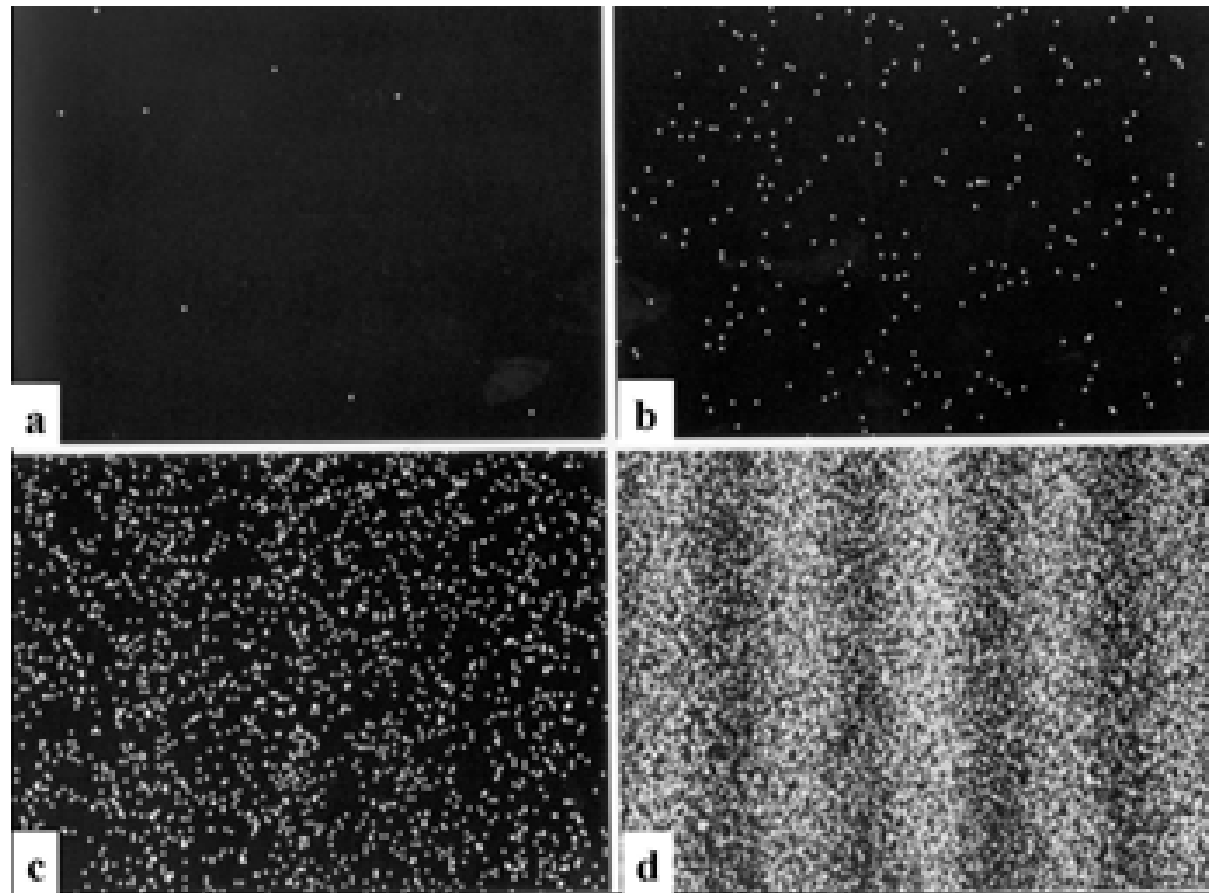
folia miedziana ze szczelinami o długości $50\mu\text{m}$, szerokości $0.3\mu\text{m}$
i odległości między środkami $1\mu\text{m}$.

Dyfrakcja elektronów o energii kinetycznej 50keV , czyli $\lambda=0.005\text{nm}$.

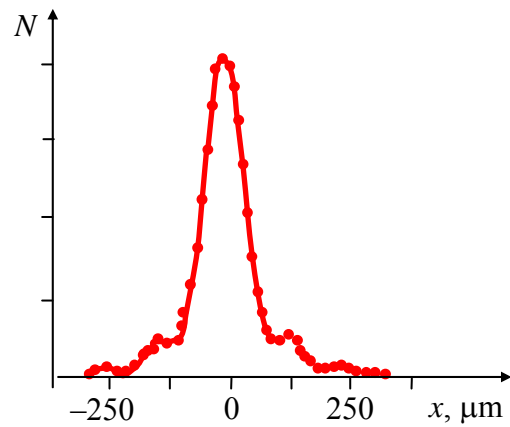
Powstawanie obrazu interferencyjnego dla wiązki elektronów w doświadczeniu z dwiema szczelinami. Elektrony przepuszczone jeden po drugim.

Ekran typu jak w telewizorach

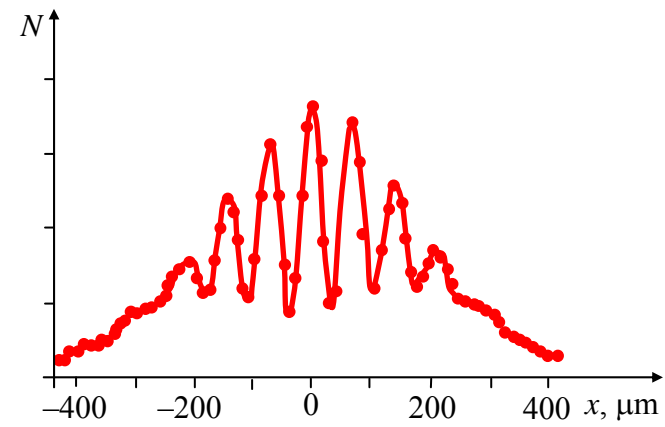
– uderzenie elektronu powoduje powstanie błysku świetlnego



Doświadczenia dyfrakcyjno-interferencyjne dla neutronów

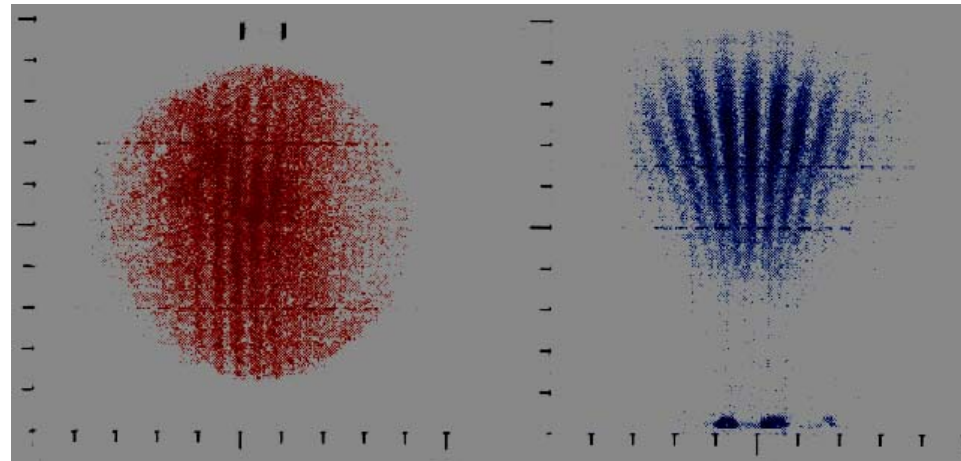
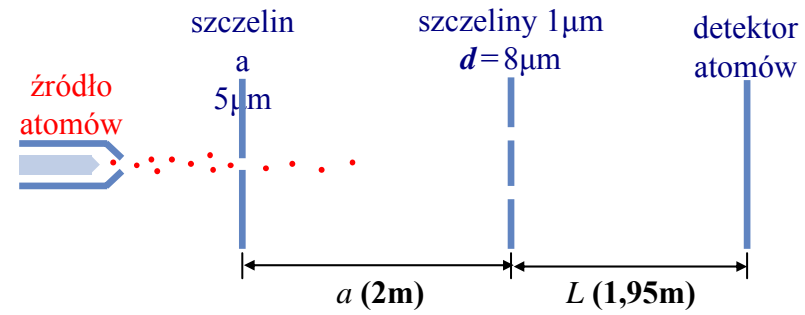


Dyfrakcja na jednej szczelinie
 $\lambda = 2\text{nm}$

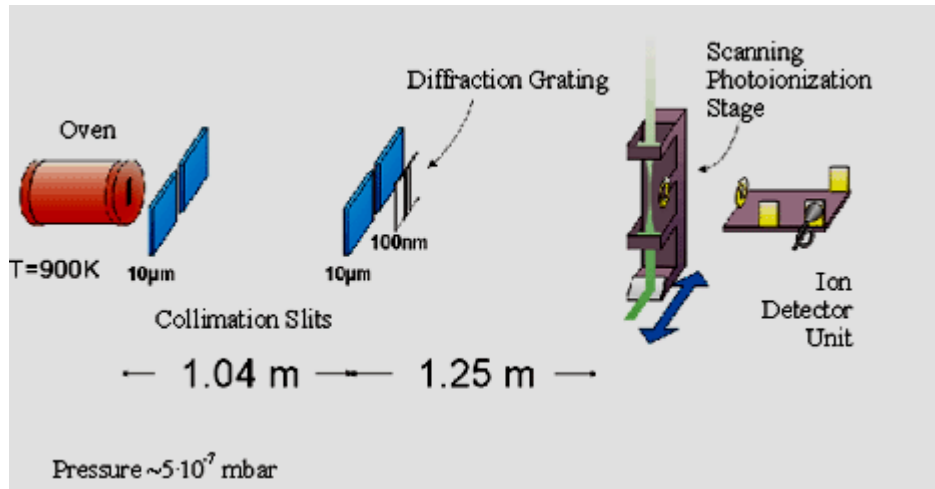


Dyfrakcja na dwóch szczelinach
 $\lambda = 2\text{nm}$

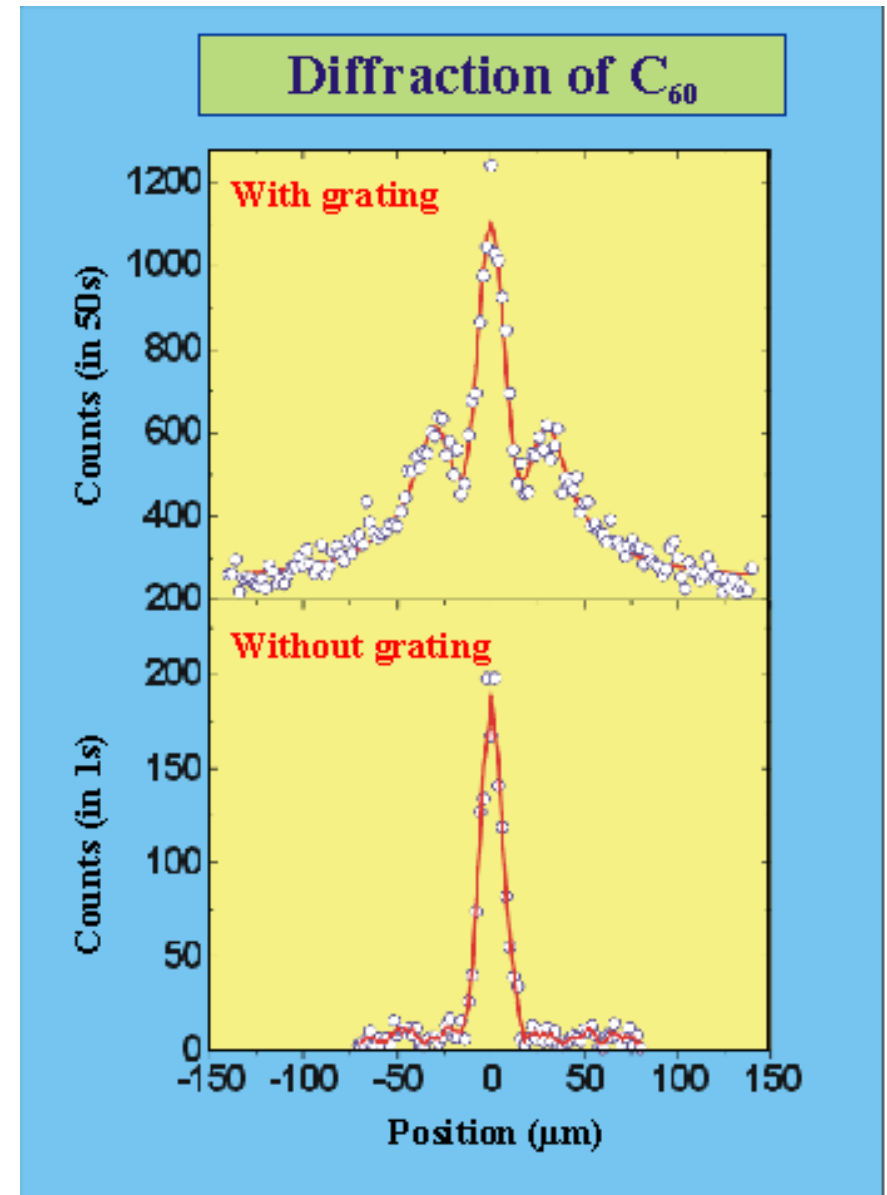
Doświadczenia dyfrakcyjno-interferencyjne dla atomów helu



Doświadczenia dyfrakcyjno-interferencyjne dla fulerenów



Fulereny z pieca z $v=210\text{m/s}$, czyli $\lambda=2.5\text{ pm}$
Siatka z SiN, szczeliny szerokości 50nm i odległości 100nm.
odległości między maksimami 0.03mm na ekranie w odległości 1.25m.



Istota fizyczna funkcji falowej dla fal de Broglie'a

Dla fotonu:

Natężenie światła monochromatycznego:

- w języku falowym jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali elektromagnetycznej
- w języku korpuskularnym jest proporcjonalne do gęstości prawdopodobieństwa znalezienia fotonu

Dla cząstki z niezerową masą spoczynkową:

zakłada się, że **kwadrat modułu funkcji falowej**

jest równy **gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki** $P(\vec{r}, t)$:

$$P(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 = \Psi(\vec{r}, t)\Psi^*(\vec{r}, t)$$

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w elemencie objętości dV

w okolicy punktu o położeniu opisanym wektorem \vec{r} dane jest wyrażeniem:

$$P(\vec{r}, t) dV = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV$$

W ramach opisu Schrödingera przyjmuje się, że jeżeli cząstka istnieje, to prawdopodobieństwo znalezienia jej „gdziekolwiek” jest równe jedności.

$$\int P(\vec{r}, t) dV = \int |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$$

Przypomnijmy, że dla fal de Broglie'a $E = \hbar\omega$ oraz $p = \hbar k$.

W 1926r. Erwin Schrödinger zaproponował **równanie falowe dla fal de Broglie'a w przybliżeniu nierelatywistycznym**.

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

najprostsze rozwiązanie równania Schrödingera to fala płaska

$$\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

(fala płaska to fala, dla której linie jednakowego wychylenia są liniami prostymi)

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} (ik)^2 Ae^{i(kx-\omega t)} = i\hbar(-i\omega)Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} = \hbar\omega \quad \text{a stąd zależność dyspersyjna} \quad \omega(k) = \frac{\hbar}{2m_0} k^2$$

$\hbar\omega = E$ ma sens energii nierelatywistycznej, bo spełnia związek $\frac{p^2}{2m_0} = E$

Rozwiązaniem jest zatem **cząstka-fala** o całkowitej energii równej jej energii kinetycznej. Jeśli cząstka miałaby jeszcze energię potencjalną $V(x)$, to **równanie Schrödingera** należy zmodyfikować do postaci:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

Jeśli w jakimś miejscu w przestrzeni mamy $V(x) = V_0$, to wstawiając do r. Schrödingera rozwiązanie w postaci fali płaskiej, poszukujemy innego $k=k_3$ (pędu, energii kinetycznej) dla ustalonego ω (energii całkowitej).

$$\frac{\hbar^2 k_3^2}{2m_0} + V_0 = \hbar\omega = E$$
$$k_3 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0(E - V_0)}$$

Często poszukujemy rozwiązań r. Schrödingera odpowiadających ustalonej energii całkowitej E – czyli ustalonej częstości kołowej ω w postaci:

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

Wstawienie do r. Schrödingera daje:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E \psi(x)$$

Jest to tzw. **równanie Schrödingera bez czasu**.

Dla stanu o ustalonej energii mamy:

$$P(x, t) = \Psi(x, t) \Psi^*(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t} \psi^*(x) e^{i\omega t} = \psi(x) \psi^*(x)$$

i gęstość prawdopodobieństwa znalezienia cząstki nie zależy od czasu. Stan taki nazywamy stacjonarnym.

Język używany w mechanice kwantowej

Operator - „coś, co działa na funkcje falową”

(coś, co wykonuje operację na funkcji falowej)

Operatory oznaczają się zwykle symbolami z daszkiem (np. \hat{A})

- operator energii kinetycznej \hat{T} $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2}$

- operator energii potencjalnej \hat{V} $\hat{V} = V(x)$

- operator Hamiltona \hat{H} $\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

- operator pędu \hat{p} $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$

- operator położenia \hat{x} $\hat{x} = x$

Jeśli dla operatora \hat{A} spełnione jest równanie

$$\hat{A}\psi(x) = a\psi(x)$$

gdzie a jest pewną **liczbą rzeczywistą**,
to mówimy wtedy, że:

1. a jest **wartością własną** operatora \hat{A}

2. $\psi(x)$ jest **funkcją własną** operatora \hat{A}

Np. **operator Hamiltona** działając na falę płaską $\psi(x) = e^{ikx}$
produkuje energię całkowitą E :

$$\hat{H}\psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

zaś operator energii kinetycznej \hat{T} – energię kinetyczną:

$$\hat{T}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} e^{ikx} = \frac{p^2}{2m_0} e^{ikx}$$

Jeżeli w różnych obszarach przestrzeni energia potencjalna opisana jest różnymi wzorami, to otrzymane różne funkcje falowe w poszczególnych obszarach musimy „zszyć” na granicach.

Warunki ciągłości:

Funkcja falowa na granicach różnych obszarów

1. musi być ciągła
2. musi posiadać ciągłe pochodne.

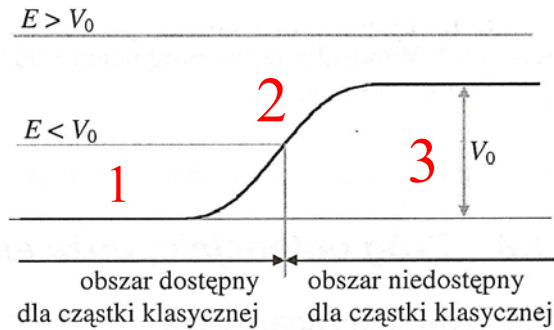
Stąd:

$$\Psi_1(\vec{r}, t) = \Psi_2(\vec{r}, t) \quad \text{dla } x = x_0$$

$$\frac{\partial \Psi_1(\vec{r}, t)}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_2(\vec{r}, t)}{\partial x} \quad \text{dla } x = x_0,$$

gdzie x_0 określa położenie granicy obszarów.

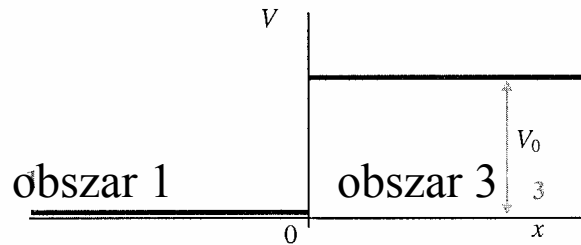
Próg potencjału



Obraz korpuskularny:

1. $E > V_0$ – działające siły zmniejszają energię kinetyczną i elektron z prawdopodobieństwem 1 przedostaje się do obszaru 3.
2. $E < V_0$ – działające siły w obszarze 2 zwracają elektron i nie może on dostać się do obszaru 3.

Model matematyczny



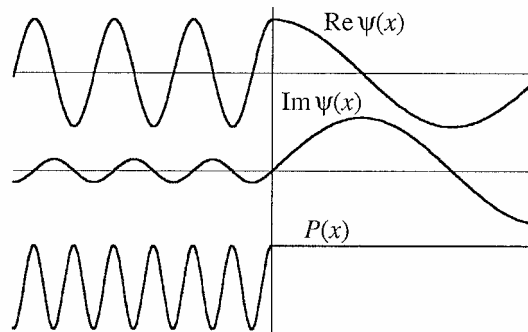
Obraz mechaniki kwantowej:

Zakładamy, że wszędzie $\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$ czyli stała energia całkowita

1. $E > V_0$

$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0E}$$

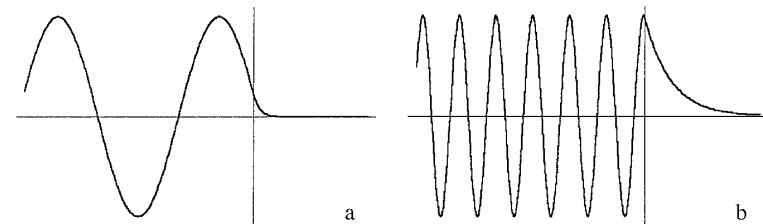
$$\psi_3(x) = Ce^{ik_3x} \quad k_3 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0(E - V_0)}$$



2. $E < V_0$

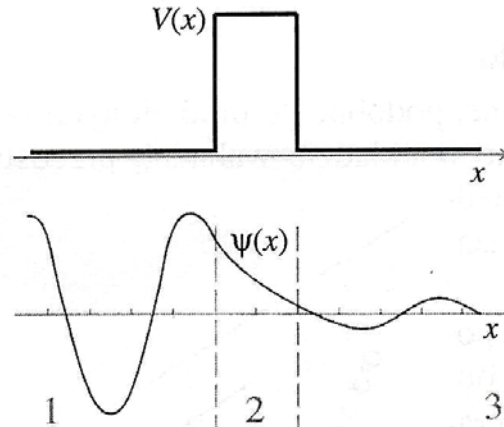
$$\psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0E}$$

$$\psi_3(x) = Ce^{-\kappa x} \quad \kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m_0(V_0 - E)}$$



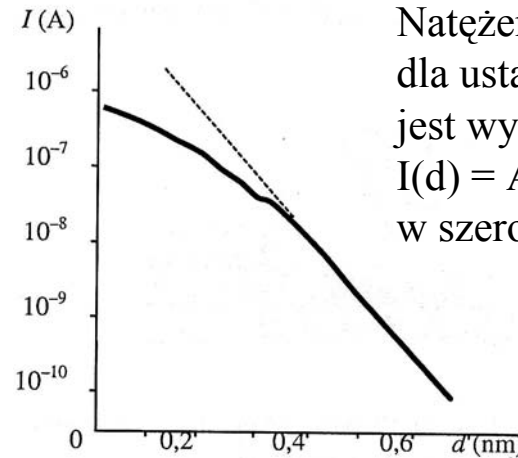
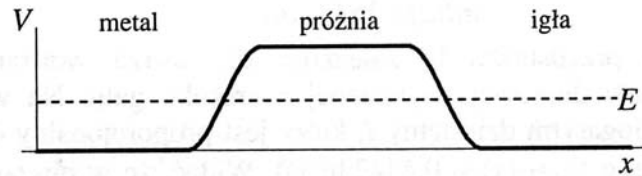
Funkcje falowe elektronu w pobliżu progu (a) $E=0,05V_0$ (b) $E=0,95V_0$

Zjawisko tunelowe (bariera potencjału)



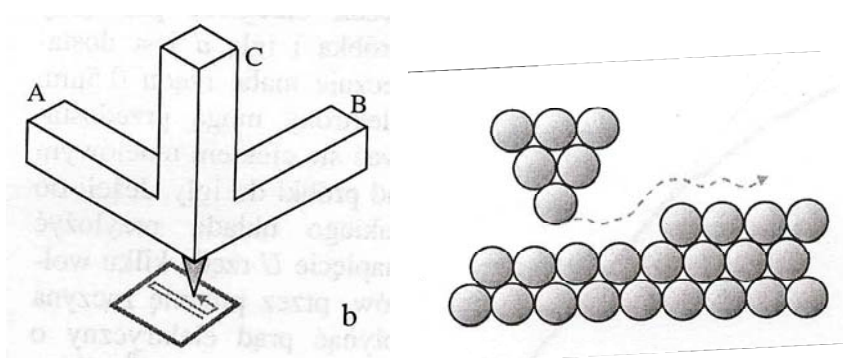
Energia potencjalna

Funkcja falowa elektronu

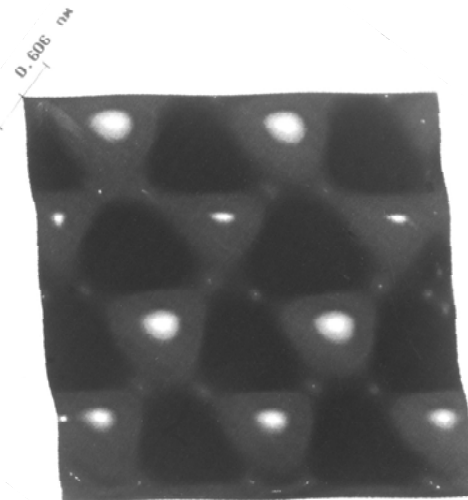


Natężenie prądu tunelowego dla ustalonego napięcia jest wykładniczą funkcją odległości $I(d) = A \exp(-\alpha d)$ w szerokim zakresie d

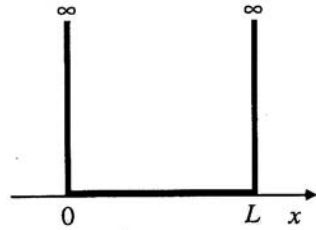
Mikroskop tunelowy



Obraz powierzchni krzemu otrzymany przy pomocy mikroskopu tunelowego (dzięki uprzejmości K. Karpierza)

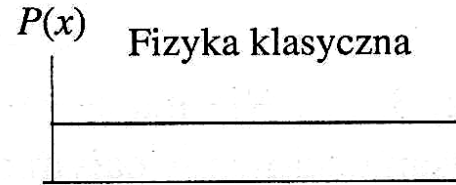


Nieskończona studnia potencjału



Obraz korpuskularny:

Dla każdego $E > 0$ elektron może przebywać w studni z prawdopodobieństwem niezależnym od x



Obraz mechaniki kwantowej:

Zakładamy, że wszędzie
czyli stała energia całkowita

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{-i\omega t}$$

w obszarze $x < 0$ i $x > L$:

$$\psi_1(x) = \psi_3(x) = 0$$

w obszarze $0 < x < L$ (z warunków brzegowych)

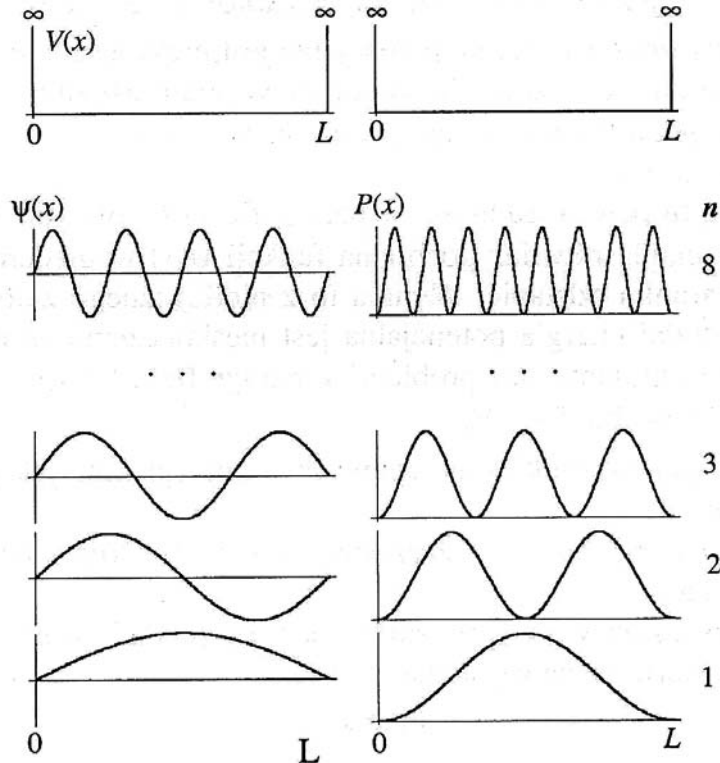
mamy skwantowanie k oraz energii

$$k_n = n \frac{\pi}{L}$$

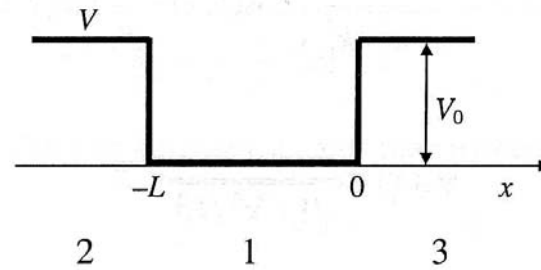
$$\psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m_0}$$

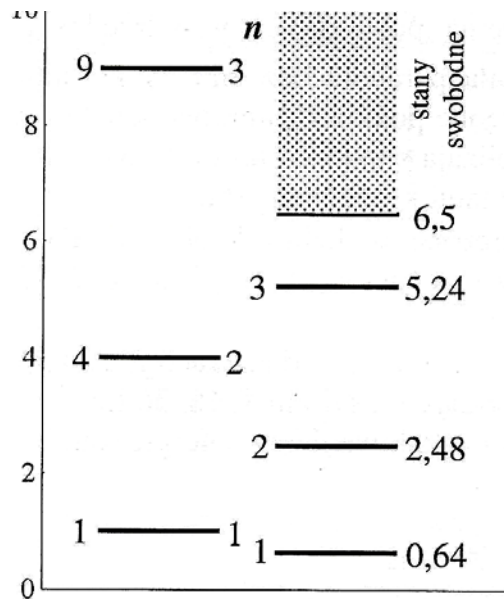
Fizyka kwantowa



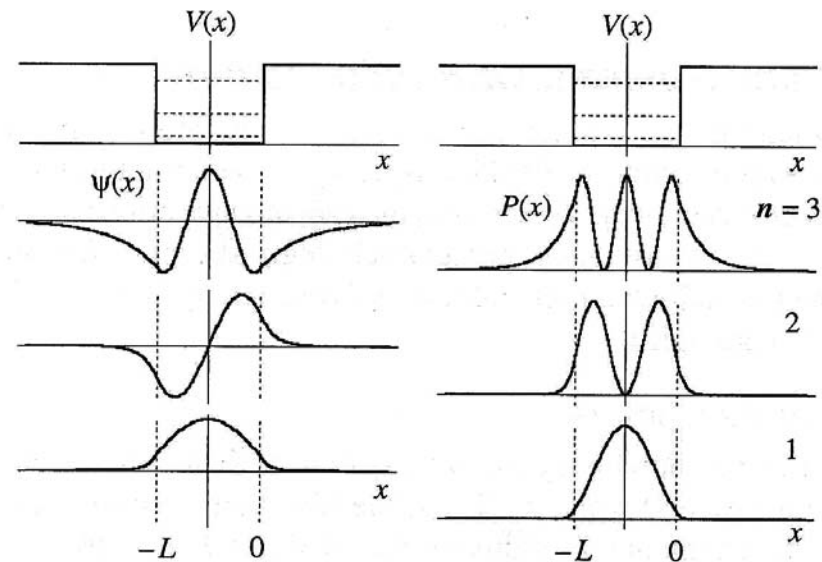
Studnia potencjału o skończonej głębokości



Energia potencjalna



Energie stanów dla studni nieskończonej i skończonej



Funkcje falowe i gęstość prawdopodobieństwa
Trzech najniższych stanów studni skończonej