

Relatywistyczny opis gluonium za pomocą efektywnych  
gluonów w chromodynamice kwantowej

Tomasz Maślowski

Praca doktorska

Promotor: dr hab. Stanisław Głazek, prof. UW



Uniwersytet Warszawski  
Wydział Fizyki  
Instytut Fizyki Teoretycznej  
Warszawa 2005



# Streszczenie

Niniejsza praca dotyczy opisu stanów związanych gluonów w chromodynamice kwantowej (QCD). Punktem wyjścia jest kanoniczny hamiltonian QCD w sformułowaniu na froncie świetlnym, zregularyzowany i uzupełniony o kontrczłon ultrafioletowy. Dla uproszczenia pomijamy kwarki, zakładając, że kluczowy problem polega na zrozumieniu mechanizmu wiązania wynikającego z nieabelowych oddziaływań gluonów, które istnieją niezależnie od kwarków. Wprowadzamy operatory kreacji i anihilacji gluonów efektywnych, wykorzystując procedurę grupy renormalizacji, która pozwala znajdować te operatory w rachunku zaburzeń. Wyrażamy wyjściowy hamiltonian za pomocą tych operatorów, i rozważamy problem własny tak zapisanego hamiltonianu. Człony oddziaływania między gluonami efektywnymi zawierają czynniki kształtu (formfaktory), których szerokość w przestrzeni pędowej, oznaczona przez  $\lambda$ , pełni rolę parametru grupy renormalizacji dla hamiltonianów i w rozważanym problemie własnym jest rzędu skali charakteryzującej badane stany.

Konstrukcja cząstek efektywnych odbywa się w rachunku zaburzeń i jest prowadzona zgodnie z wymogami szczególnej teorii względności. Zasady tej konstrukcji przedstawiamy na przykładzie procedury drugiego rzędu w oddziałującej teorii skalarnej. Przykład ten zawiera oddziaływanie typu trójgluonowego, ale jest wolny od wszystkich komplikacji QCD związanych z liczbami kwantowymi innymi niż pędy i innymi oddziaływaniami niż te, które zmieniają liczbę cząstek o jedną. Nowym elementem jest podanie schematu konstrukcji nie jednego hamiltonianu, lecz całej algebry 10 generatorów grupy Poincaré w przestrzeni Fock'a cząstek efektywnych. W szczególności dostajemy trudną do spełnienia na froncie świetlnym algebrę momentu pędu.

Konstrukcję tę stosujemy następnie do gluonów w QCD. Czynniki kształtu w wierzchołkach oddziaływania powodują, że kolorowo obojętny stan dwóch gluonów efektywnych sprzęga się do stanu trzech gluonów w ograniczony sposób nawet dla wartości stałej sprzężenia  $\alpha_s$  porównywalnych z 1, gdy  $\lambda$  jest rzędu 1 GeV. Zbudowawszy bazę w przestrzeni stanów gluonów efektywnych dla tak małych  $\lambda$ , analizę mechanizmu wiązania efektywnych gluonów w gluonium prowadzimy do rzędu  $g^2$ . Pozwala nam ona uwzględnić dwu i trójcząstkowy sektor przestrzeni Fock'a. W sektorze trójcząstkowym, wszystkie oddziaływania i sprzężenia z sektorami z większą liczbą gluonów efektywnych zastępujemy przez ansatz na masę gluonów w tym sektorze i badamy oddziaływanie, które powstają w gluonium w wyniku redukcji układu sprzężonych równań dla sektorów dwu i trójgluonowych do sektora z tylko dwoma gluonami efektywnymi. Człony oddziaływania w hamiltonianie efektywnym są rozbieżne dla małych pędów podłużnych. Nadanie masy gluonom efektyw-

---

nym w sektorze trójcząstkowym musi być tak zrobione, by wyrugowanie tego sektora doprowadziło do skończonego równania własnego dla problemu zredukowanego do oddziaływań tylko dwóch gluonów efektywnych. Aby zapewnić skończoność takiego równania własnego narzucamy niezbędne warunki na nasz ansatz na masę gluonów efektywnych w pośrednim stanie trójgluonowym.

Numeryczne rozwiązanie równania własnego dla efektywnego hamiltonianu gluonium prowadzi do stanów związanych, w których mechanizm wiązania jest następujący. Najważniejszymi elementami dynamiki są samooddziaływanie gluonów efektywnych i wymiana gluonu efektywnego. Zarówno samooddziaływanie jak i wymiana są czułe na długozasięgowe potencjały na froncie świetlnym, które silnie rosną dla małych wartości zmiennej typu  $x$  Feynmana z modelu partonowego. Samooddziaływania prowadzą do powstawania dużej masy każdego z gluonów z osobna, zaś oddziaływanie wymiany jest w stanie skompensować ten wzrost wtedy, gdy dwa gluony są blisko siebie i tworzą singlet kolorowy.

Dla pewnego zakresu parametru  $\lambda$  i jakościowo poprawnej zależności silnej stałej sprzężenia  $\alpha_s(\lambda)$ , zapostulowany przez nas ansatz na masy gluonów w stanie trzech gluonów efektywnych pozwala uzyskać rozwiązania na masę najbliższego gluonium rzędu 2 GeV, i zgadza się co do rzędów wielkości z rezultatami otrzymywanymi na sieci. Nasze równanie na gluonium nie respektuje ściśle symetrii obrotowej w układzie środka masy. W rozwiązaniach na masy gluoniów nie ma więc ścisłej degeneracji odpowiadającej symetrii obrotowej przez co pogrupowanie stanów w odpowiednie multiplety nie było ściśle możliwe, ale symetria względem frontowych pchnięć Lorentza jest zachowana ściśle.

Nasze przybliżenia stosują się do układów, w których odległość między gluonami jest nie większa niż rzędu odwrotności  $\Lambda_{QCD}$ , tzn. w sytuacji, gdy składowa trójgluonowa może być niewielka. Dla rozważenia dużych odległości między gluonami musielibyśmy rozważyć stany wielogluonowe i liczba gluonów prawdopodobnie będzie rosła liniowo z długością struny gluonowej między skrajnymi gluonami.

## Podziękowania

Chciałbym podziękować swojemu promotorowi profesorowi Stanisławowi Głazkowi, za wysiłek jaki włożył w moją edukację w dziedzinie fizyki i stałą pomoc na jaką mogłem liczyć przez cały czas pisania doktoratu.

Dziękuję też mojej żonie Asi i całej rodzinie, że byli dla mnie wyrozumiali, szczególnie w ostatnim okresie.



# Spis treści

Streszczenie	i
Podziękowania	iii
<b>1 Wstęp</b>	<b>1</b>
<b>2 Konstrukcja zrenormalizowanej dynamiki cząstek efektywnych</b>	<b>7</b>
2.1 Front świetlny . . . . .	9
2.2 Kanoniczne generatory grupy Poincaré w KTP . . . . .	10
2.3 Procedura RGPEP . . . . .	14
2.4 Uogólnienie na całą algebrę Poincaré . . . . .	18
<b>3 QCD na froncie świetlnym</b>	<b>23</b>
3.1 $H_{QCDg}$ na froncie świetlnym . . . . .	23
3.1.1 Kwantyzacja . . . . .	24
3.1.2 Regularyzacja . . . . .	24
3.2 Zregularyzowany hamiltonian dla QCDg . . . . .	26
3.3 Hamiltonian efektywny QCDg 2-go rzędu . . . . .	27
3.4 Równanie własne . . . . .	29
3.4.1 Ansatz . . . . .	31
3.4.2 Eliminacja sektora trójgluonowego . . . . .	33
3.4.3 Rozbieżności małych $x$ . . . . .	35
<b>4 Wyniki</b>	<b>39</b>
4.1 Niezależność rozwiązań od $\lambda$ . . . . .	43
4.2 Niezależność od wyboru parametrów $\mu^2$ . . . . .	47
4.3 Przypadek $f_\lambda = \exp[-(\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2)/\lambda^4]$ . . . . .	48
4.4 Stabilność numeryczna wyników . . . . .	49
4.4.1 Całkowanie numeryczne . . . . .	50
4.4.2 Zależność od parametru bazy $\Lambda$ . . . . .	51

---

4.4.3	Zależność od liczby użytych wektorów bazy . . . . .	52
4.4.4	Dokładność obliczeń . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Podsumowanie</b>	<b>54</b>
<b>A</b>	<b>Front świetlny</b>	<b>56</b>
<b>B</b>	<b>Szczegóły obliczeniowe</b>	<b>58</b>
B.1	Baza . . . . .	58
B.2	Równanie własne . . . . .	61
B.2.1	Elementy macierzowe $\hat{\mathcal{M}}^2$ . . . . .	61
B.2.2	Energia kinetyczna . . . . .	62
B.2.3	Część masowa . . . . .	62
B.2.4	Część oddziaływania . . . . .	63
B.2.5	Dowód zbieżności $I_{high}^{rest}$ . . . . .	67
<b>C</b>	<b>Baza swobodnego momentu pędu</b>	<b>69</b>
C.1	Stany własne $\vec{J}_0^2$ . . . . .	71



# Rozdział 1

## Wstęp

Od momentu podania przez Gell-Mann'a i Fritzscha [1] lagranżjanu chromodynamiki kwantowej minęło już ponad 30 lat. W tym czasie QCD stała się powszechnie akceptowaną teorią oddziaływań silnych, chociaż wciąż brak pełnego potwierdzenia, że za pomocą QCD możemy opisywać hadrony z dużą precyzją. Odkrycie asymptotycznej swobody [2, 3] otworzyło przed fizykami dostęp do tajemnic mikroświata, jednak szybko okazało się, że, w odróżnieniu od sukcesów w zastosowaniu perturbacyjnej QCD do opisu wysokoenergetycznych zderzeń cząstek, problemy z opisem stanów związanych kwarków i gluonów są znacznie trudniejsze, bowiem stała sprzężenia w QCD dla małych energii jest duża, i analiza niskoenergetycznej części QCD nie poddaje się metodom perturbacyjnym. Próby nieperturbacyjnej analizy dynamiki kwarków doprowadziły do konstrukcji modeli konstytuentnych (relatywistyczny oscylator harmoniczny [4], MIT Bag [5], CQM [6], model Skyrme'go [7]), które w miarę rozwoju teorii starały się nawiązywać do obserwacji poczynionych w QCD. Jednak opisy oparte na modelach kwarków konstytuentnych nie mogły wykorzystywać sukcesów QCD, jakie ta teoria odniosła w opisie wysokoenergetycznych procesów rozpraszania w połączeniu z modelem partonowym, dlatego, że obraz protonu zbudowanego z wielu partonów nie daje się precyzyjnie powiązać z obrazem protonu zbudowanego tylko z trzech kwarków. Na razie próby zbudowania jednolitej teorii nie doprowadziły do tego, że QCD stała się dla modelu konstytuentnego tym, czym elektrodynamika kwantowa dla jest dla równania Schrödingera, ani równanie Schrödingera dla modelu atomu Bohra. Klasyfikacja hadronów w tablicach cząstek zasadza się na pojęciu kwarków konstytuentnych i fakt, że QCD w swej wysokoenergetycznej części bardzo dobrze opisuje dane w połączeniu z modelem partonowym [8], nie powinien wykluczać możliwości opisu hadronów za pomocą cząstek efektywnych dla małych energii. W tym celu potrzebna jest precyzyjna definicja cząstek efektywnych, takich jak kwarki konstytuentne, w kwantowej teorii

pola. Takie cząstki efektywne mogłyby się składać z wielu partonów. Weryfikacja czy opis cząstkowy jest możliwy w QCD dla małych energii, wymaga analizy stanów związanych kwarków i gluonów z zastosowaniem dobrze zdefiniowanego pojęcia tych cząstek. Propozycją takiej metody jest procedura grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych (RGPEP = Renormalization Group Procedure for Effective Particles), która jest rozwijana i wykorzystywana w niniejszej pracy w zastosowaniu do gluonium.

Idea cząstek efektywnych polega na obserwacji, że hadrony, z jednej strony, są sklasyfikowane za pomocą kwarków konstytuentnych, a z drugiej strony, te same hadrony w relatywistycznych procesach rozpraszania opisuje się wykorzystując model partonowy. Procedura RGPEP stara się połączyć obraz rozciągniętych cząstek konstytuentnych z punktowymi partonami. W procedurze RGPEP zakładamy, że stopnie swobody z jakich buduje się hadrony w modelu konstytuentnym, a więc kwarki konstytuentne, są powiązane z partonowymi stopniami swobody za pomocą pewnej transformacji unitarnej [9, 10]. Podejście takie stawia sobie za cel powiązanie wysokich i niskich energii w ramach jednej teorii. Można uważać, że realizujemy idee pochodzące od Gell-Mann'a i Melosh'a [1, 11]. Nowym elementem jest jawna konstrukcja zrenormalizowanych operatorów dynamicznych w kwantowej teorii pola.

Obraz cząstkowy wydaje się właściwy dla sformułowania problemu istnienia stanów związanych w QCD, bo blisko się wiąże z fenomenologią hadronów. Z drugiej strony najbardziej naturalnym sformułowaniem zagadnienia stanów związanych jest równanie własne dla hamiltonianu teorii, które to równanie będziemy nazywać równaniem Schrödinger'a. Jednakże, gdy w grę wchodzi relatywistyczne oddziaływanie, mogące kreować bądź anihilować cząstki, to musimy połączyć precyzyjny opis kwantowy z wymaganiami szczególnej teorii względności. Wskazówkę jak to zrobić podał Dirac [12]. Konieczne jest skonstruowanie operatorów algebry Poincaré. Po eksponencjalizacji otrzymane operatory grupy Poincaré umożliwiłyby weryfikację, czy rozwiązania otrzymane za pomocą hamiltonianu reprezentują symetrie czasoprzestrzenne. Realizacja programu Diraca nie jest prosta nawet tylko w drugim rzędzie rachunku w potęgach oddziaływania, bowiem iloczyn więcej niż dwóch operatorów pola kwantowego (tzn. wszystkie operatory z oddziaływaniem) jest nieskończony. Natura takich nieskończoności jest dobrze poznana i wiadomo, że mają one swoje źródło w tym, że teoria pola jest lokalna. Punktowość oddziaływań jest związana z przekazem dowolnie dużych pędów i sumowanie po pędach prowadzi do rozbieżności ultrafioletowych.

Procedura RGPEP stanowi metodę rozwiązywania problemu rozbieżności ultrafioletowych w języku cząstek. Punktowe oddziaływania w hamiltonianie wyjściowej teorii lokalnej są zastąpione przez oddziaływania rozciągniętych cząstek efektywnych w wyprowadzonym dla nich hamiltonianie. Wierzchołki

w hamiltonianie efektywnym mają czynniki kształtu (formfaktory), przez co oddziaływania efektywne nie sprzęgają ze sobą stanów o znacznie różniących się energiach.

W celu konstrukcji algebry Poincaré, Dirac wskazał inne formy dynamiki hamiltonowskiej niż standardowa. Zamiast określać stan układu kwantowego na hiperpowierzchni stałego czasu  $t = 0$ , Dirac zaproponował, między innymi, użycie do tego celu powierzchni frontu świetlnego. W niniejszej pracy korzystamy z licznych zalet takiego podejścia i nasze rozważania prowadzimy na froncie świetlnym, czyli na hiperpowierzchni danej konwencjonalnie przez  $x^0 + x^3 = 0$ .

Jako cel naszej analizy stawiamy sobie problem istnienia gluonium. Zagadnienie to bowiem zawiera w sobie istotne problemy z jakimi spotykamy się w QCD, rozważając stany związane w teorii z asymptotyczną swobodą, a jednocześnie jest pozbawione komplikacji pochodzących ze strony kwarków. Jako pierwsze przybliżenie dla gluonium przyjmujemy układ zbudowany z dwóch gluonów efektywnych. Hamiltonian efektywny,  $H_\lambda$  otrzymany za pomocą procedury RGPEP, zawiera czynniki kształtu w wierzchołkach, które powodują, że sprzężenie z trzema gluonami i ich większą liczbą jest słabe nawet wtedy, gdy stała sprzężenia rośnie. Dlatego też ograniczenie się do analizowania jedynie sektorów dwu i trójgluonowego jest wciąż związane z prawdziwą dynamiką QCD. Niemniej problem własny dla  $H_\lambda$ , jest bardzo skomplikowany. Redukcja dynamiki do sektora dwugluonowego, uwzględniająca sektor trójgluonowy w pewnym przybliżeniu, daje szansę na przeprowadzenie wstępnych obliczeń numerycznych.

Obcięcie teorii z cechowaniem do sektora dwugluonowego prowadzi do komplikacji związanych z istnieniem rozbieżności małych  $x$ .  $x$  ma interpretację zmiennej Feynman'a w modelu partonowym, z tym, że odnosi się do współrzędnych pędu w sformułowaniu na froncie świetlnym, zamiast zwykłych współrzędnych w układzie nieskończonego pędu. Istnienie rozbieżności małych  $x$  wiąże się z tym, że w sformułowaniu na froncie świetlnym musimy wybrać cechowanie  $A^+ = A^0 + A^3 = 0$  [13, 14]. Spełnienie prawa Gauss'a wymusza na nas wyrażenie składowej pola  $A^-$  przez odwrotności operatora  $\partial^+$ . W rozkładzie pola  $A^+$  na mody fourierowskie pojawiają się odwrotności pędu podłużnego  $p^+$ . Ponieważ  $x$  oznacza stosunek pędu podłużnego cząstki,  $p^+$ , kreowanej lub anihilowanej w wierzchołku oddziaływania, do pędu cząstki „rodzica”, to problem małych  $x$  pojawiać się będzie wszędzie tam, gdzie cząstki będą emitowane lub absorbowane z małymi pędami podłużnymi. Rozbieżności małych  $x$  mają więc inne pochodzenie niż rozbieżności ultrafioletowe i nie są usuwane przez procedurę RGPEP podczas generowania oddziaływań pomiędzy cząstkami efektywnymi. Pojawienie się tych rozbieżności w rachunkach jest dla nas wskazówką by uwzględnić sektor

trójgluonowy i jak modelować oddziaływania w nim, tak aby nie pojawiły się rozbieżności małych  $x$  w równaniu własnym opisującym oddziaływania już tylko dwóch gluonów efektywnych. Wymóg kasowania się tych rozbieżności narzuca silne warunki na ansatz na masę gluonów efektywnych w sektorze trójgluonowym, który postulujemy. Ansatz ten zapewnia również zwiększenie energii stanów trójgluonowych, by wzrost ten uzasadniał przybliżenie gluonium tylko przez stany dwucząstkowe.

Człon masowy z ansatzem na masę gluonów w sektorze trójcząstkowym oznaczymy przez  $T^{\mu^2}$  ( $\mu^2$  oznacza masę gluonów). Ansatz na masę jest wprowadzony w następujący sposób [15, 16]. Hamiltonian efektywny  $H_\lambda$  jest sumą energii kinetycznej  $T_\lambda$  i oddziaływań efektywnej QCD,  $V_\lambda$ . Dla pewnej wartości  $\lambda_0$ , charakteryzującej hamiltonian efektywny, mamy  $\alpha_s(\lambda_0) = \alpha_s^{phys}$ , gdzie  $\alpha_s(\lambda) = g_\lambda^2/(4\pi)$  i  $\alpha_s^{phys}$  jest fizyczną wartością stałej sprzężenia dla procesów o energiach rzędu  $\lambda_0$ . Możemy, bez żadnych zmian w hamiltonianie  $H_\lambda$ , dodać do hamiltonianu człon  $[1 - (\alpha_{\lambda_0}/\alpha_s)^2]T^{\mu^2}$  bo dla  $\alpha_s(\lambda_0) = \alpha_s^{phys}$  ten człon znika. Z drugiej strony zawsze możemy napisać

$$H_{\lambda_0} = T_{\lambda_0} + T^{\mu^2} + \left[ V_{\lambda_0} - \left( \frac{\alpha_s(\lambda_0)}{\alpha_s^{phys}} \right)^2 T^{\mu^2} \right]. \quad (1.1)$$

Zauważmy, że gdy  $\alpha_s(\lambda_0) \ll \alpha_s^{phys}$ , to  $V_{\lambda_0}$  można liczyć w rachunku zaburzeń i wszystkie człony w nawiasie kwadratowym są małe w porównaniu z pierwszymi dwoma i mogą być traktowane jako poprawki do  $T^{\mu^2}$ . W ten sposób, pomimo dodania do hamiltonianu ansatzu na masę  $\mu^2$ , nie zamykamy sobie drogi do systematycznego rachunku. Gdy  $\alpha_s(\lambda_0) \rightarrow \alpha_s^{phys}$ , wtedy uwzględniamy coraz więcej rzędów rachunku zaburzeń i odtwarzamy  $H_{\lambda_0}$ . Zaletą tego podejścia jest fakt, że w przypadku gdy ansatz na  $\mu^2$  jest zgodnięty we właściwej postaci, to nawet w niskim rzędzie rachunku zaburzeń mamy szansę zbliżyć się do rozwiązań prawdziwej dynamiki. W niniejszej pracy ograniczymy się do najniższego rzędu, tj. tylko do członu z  $T^{\mu^2}$ , który daje jakościowo rozsądny opis gluonium, tzn. zgodny z oczekiwaniami opartymi na fenomenologii hadronów. W szczególności, widmo hadronów nie zawiera wzbudzeń gluonowych, które odpowiadałyby serii Balmera w atomie wodoru, jak w QED z bezmasowymi fotonami. Masy hadronów wydają się mówić, że gluony efektywne należy opisywać jakby miały znaczne masy.

Zagadnienie własne dla hamiltonianu efektywnego, uzupełnionego przez ansatz na  $\mu^2$ , rozwiązujemy numerycznie. Jednak do pełnej realizacji programu Diraca brakuje nam klasyfikacji stanów w multiplety o ustalonym momencie pędu (spinie). Jest to wynikiem zależności od oddziaływania operatora obrotów na froncie świetlnym, co jest dotkliwym problemem [17], choć przykład teorii skalarnej pokazuje, że systematyczna analiza możliwa jest i

dla tego zagadnienia [18]. Nasze podejście numeryczne wykorzystuje podejście konstrukcji bazy dla cząstek efektywnych, które jest zgodne z zasadą konstrukcji całej algebry Poincaré w języku operatorów kreacji i anihilacji cząstek efektywnych. Ponieważ hamiltonian  $H_\lambda$  jest liczony w niskim rzędzie, nasz ansatz nie rozwiązuje problemu konstrukcji stanów gluonium w pełni. Z tego też powodu nie otrzymujemy ścisłej degeneracji mas gluonium zgodnej z symetrią obrotową. Z drugiej strony, przykład konstrukcji pełnej algebry, który podajemy w teorii skalarnej, pokazuje, że systematyczna analiza powinna w zasadzie być możliwa i dla symetrii obrotowej. W przypadku QCD, z ansatzem na masę gluonów efektywnych, symetria obrotowa jest realizowana tylko w pewnym przybliżeniu i nadal stanowi nierozwiązany problem. Niemniej nasza analiza otwiera drogę do rachunków wyższych rzędów i poprawienia naszego przybliżonego opisu dynamiki gluonów przez stopniową eliminację ansatzu na masę w rachunkach wyższych rzędów. Zanim jednak rozważy się konstrukcję operatora obrotów dla nieabelowych teorii z cechowaniem powstaje pytanie, czy w ogóle istnieje możliwość reprezentowania gluonium przez dwa gluony efektywne z jakimkolwiek ansatzem na masę. Jak zacząć konstruowanie gluonium w pierwszym przybliżeniu i rozwinąć rachunek zaburzeń podobnie, jak się to robi w QED.

Niniejsza praca jest zbudowana jak następuje. W drugiej części dyskutujemy ogólne zasady konstrukcji zrenormalizowanej teorii efektywnej, wprowadzamy pojęcie cząstki efektywnej i omawiamy rolę czynników kształtu (formfaktorów), w hamiltonianie efektywnym, w budowaniu systematycznych przybliżeń dla skomplikowanych teorii. W rozdziale tym prezentujemy konstrukcję pełnej algebry Poincaré do rzędu  $g^2$ , używając jako przykładu teorii skalarnej z oddziaływaniem  $g\phi^3$ . Ponieważ w tym przykładzie ograniczamy się do rachunku zaburzeń, nie jest istotne, że teoria skalarna  $\phi^3$  nie ma stanu podstawowego, natomiast jest istotne, że oddziaływanie typu  $\phi^3$  występuje w QCD w rachunku zaburzeń. W teorii skalarnej prezentujemy również schemat regularyzacji ultrafioletowej, którego użyjemy również w przypadku QCD.

Część trzecia w całości jest poświęcona gluodynamice. Prezentujemy tam regularyzację małych  $x$ , która umożliwi ich analizę. Postulujemy tam ansatz na masę,  $\mu^2$ , gluonów w sektorze trójcząstkowym i znajdujemy jego postać wymaganą przez nieabelową strukturę QCDg i jej rozbieżności małych  $x$ . Następnie rozważamy równanie własne na stan gluonium, wolne już od rozbieżności małych  $x$ . Wyjaśniamy mechanizm kasowania się rozbieżności małych  $x$  w obecności ansatzu na  $\mu^2$ .

Kolejna część omawia otrzymane wyniki obliczeń numerycznych na masy stanów związanych dwóch gluonów efektywnych. Dyskutujemy zależność wyników od parametryzacji wprowadzonego ansatzu, dyskutujemy stabilność numeryczną wyników i ich zgodność z wynikami na masę gluonium w QCD

w rachunkach na sieci.

W części piątej podsumowujemy otrzymane wyniki na masy stanów związanych gluonów efektywnych i podkreślamy rolę poczynionych założeń oraz przybliżeń jakie były konieczne, by móc rozpocząć w systematyczny sposób analizę dynamiki gluonów w chromodynamice kwantowej.

W dodatkach znajdują się istotne wzory używane w niniejszej pracy. W szczególności dodatek C zawiera konstrukcję bazy stanów własnych dla swobodnego operatora kwadratu momentu pędu dla bezmasowych bozonów o spinie 1 na froncie świetlnym. Baza ta może stanowić w przyszłości narzędzie do systematycznej analizy pełnego zależnego od oddziaływania operatora momentu pędu w QCD na froncie świetlnym.

## Rozdział 2

# Konstrukcja zrenormalizowanej dynamiki cząstek efektywnych

Do pełnego opisu cząstek potrzebna jest relatywistyczna teoria kwantowa, w ramach której możliwy jest opis stanów związanych. Pomysł jak połączyć mechanikę kwantową i szczególną teorię względności zaproponował Dirac [12]. Zbudowanie relatywistycznej teorii kwantowej jest uwarunkowane udaną konstrukcją 10 generatorów grupy Poincaré. Są to cztery generatory przesunięć w czasoprzestrzeni  $P^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  i po trzy generatory obrotów i pchnięć  $M^{\mu\nu}$ . Niniejszy rozdział przedstawia schemat konstrukcji tych generatorów za pomocą dobrze zdefiniowanego pojęcia cząstek efektywnych w kwantowej teorii pola (KTP).

Generatory te muszą spełniać następujące relacje komutacyjne:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (2.1)$$

$$[P^\mu, M^{\nu\rho}] = i(g^{\mu\nu} P^\rho - g^{\mu\rho} P^\nu), \quad (2.2)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} M^{\sigma\nu} - g^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} + g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}). \quad (2.3)$$

Warunek, by oddziaływania cząstek były relatywistyczne, implikuje konieczność uwzględnienia procesów kreacji i anihilacji cząstek. Warunek ten jest a priori możliwy do spełnienia w KTP, kiedy do opisu oddziaływań stosuje się procedurę grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych. Ta procedura jest potrzebna, bowiem KTP prowadzi do rozbieżności ultrafioletowych wynikających z lokalnego charakteru oddziaływań. Problem istnienia rozbieżności w lokalnej teorii dotyka wszystkich generatorów grupy Poincaré zależnych od oddziaływania cząstek i wymaga regularyzacji. Regularyzacja oprócz tego, że wprowadza do teorii aprioryczny parametr regularyzacji (de facto wprowadza ten parametr przez cały schemat regularyzacji), to niszczy symetrie jakie potencjalnie zawierała w sobie lokalna teoria.

Gdyby teoria nie wymagała regularyzacji, problem byłby już rozwiązany przez Diraca. Ponieważ podanie dobrej teorii wymaga regularyzacji, a regularyzacja łamie relacje (2.1-2.3), potrzebna jest dodatkowa procedura uniezależniająca fizycznie akceptowalną teorię od regularyzacji, z zachowaniem pojęcia cząstek. Pojęcie cząstek kwantowych w odróżnieniu od pól, nie jest uzasadnione względami czysto matematycznymi lecz faktami doświadczalnymi, które przemawiają za kwantową naturą materii i promieniowania. W przypadku oddziaływań silnych wyniki doświadczalne, przemawiające za cząstkową naturą hadronów, są zebrane w tablicach mezonów i hadronów zbudowanych z konstytuencyjnych kwarków i antykwarków [19]. W tablicach tych nie pojawia się spektrum mas hadronów analogiczne do serii Balmera dla atomu wodoru. Widmo hadronów wygląda tak, jakby wzbudzenia pola gluonowego były opisywane przez kwanty o dużej masie, rzędu masy protonu. Dlatego problem konstrukcji generatorów, które spełniają relacje (2.1-2.3) w KTP, z myślą o opisie oddziaływań silnych warto rozważyć pod kątem precyzyjnej teorii cząstek efektywnych. Naszym celem jest wstępna analiza teorii gluonów efektywnych w chromodynamice kwantowej, oparta na wielu daleko idących uproszczeniach. Niemniej, teoria, którą będziemy analizować musi być skonstruowana według schematu zawierającego wymagania reguł komutacyjnych (2.1-2.3).

Prezentowana przez nas analiza opiera się na propozycji realizacji pomysłu Diraca w lokalnej kwantowej teorii przez zastosowanie specjalnej procedury grupy renormalizacji do chromodynamiki gluonów, w której lokalne punktowe bozony cechowania zastąpione zostają przez efektywne cząstki charakteryzowane przez pewną skalę  $\lambda$  o wymiarze pędu. W odróżnieniu od cząstek o rozmiarach punktowych, cząstki efektywne są rozciągłymi obiektami o charakterystycznych rozmiarach  $1/\lambda$ . Powszechnie znane trudności techniczne chromodynamiki zmuszają nas do daleko idących uproszczeń, ale procedura na której opiera się nasze podejście nie wymaga rozważania wszystkich komplikacji niezbędnej teorii, kiedy rozważa się przedstawienie trudności obrazu cząstkowego spowodowane rozbieżnościami ultrafioletowymi. Przedstawiony poniżej schemat konstrukcji generatorów grupy Poincaré za pomocą cząstek efektywnych jest na tyle ogólny, że jego zasady można przedstawić na przykładzie cząstek skalarnych, a problemy związane ze spinem i symetrią cechowania będą analizowane w następnych rozdziałach.

Zasada naszej konstrukcji polega na tym, że generatory grupy Poincaré są zapisane za pomocą cząstek efektywnych, których oddziaływania zawierają czynnik kształtu w wierzchołkach (formfaktory) i są już wolne od rozbieżności ultrafioletowych. Sztuka polega na określeniu w jaki sposób można w ogóle dojść do usunięcia zależności od regularyzacji i odtworzenia symetrii Poincaré w teorii cząstek efektywnych.



Procedura, której używamy jest przeprowadzana w rachunku zaburzeń, rząd po rządzie w stałej sprzężenia  $g$ . Zakładamy, że stała sprzężenia  $g$  jest mała, powołując się na warunek asymptotycznej swobody. W teorii skalarnej w 4 wymiarach, której używamy do wyłożenia schematu naszego rozumowania, nie mamy pełnego obrazu chromodynamiki z asymptotyczną swobodą, zakładamy jedynie, że stała  $g$  jest dowolnie mała i rozważamy teorię skalarną wyłącznie w celu przedstawienia konstrukcji w rachunku zaburzeń (nie rozważamy żadnych efektów nieperturbacyjnych teorii skalarnej, np. własności stanu próżni). Naszym głównym celem w tej części, jest podanie konstrukcji hamiltonianu i innych generatorów zależnych od oddziaływania.

## 2.1 Front świetlny

Standardowo stan kwantowy układu fizycznego określa się na hiperpowierzchni stałego czasu, np.  $x^0 = 0$ . W takim wypadku generatorami są generatory przesunięć przestrzennych  $\vec{P}$  i obrotów  $\vec{J}$ . Generatory te zachowują hiperpowierzchnię  $x^0 = 0$  i są niezależne od oddziaływania, takie generatory nazwiemy kinematycznymi. Generatory odpowiadające transformacji, które nie zachowują hiperpowierzchni  $x^0 = 0$ , zależą od oddziaływania (w przypadku teorii oddziałującej) i nazwiemy je generatorami dynamicznymi. W standardowym sformułowaniu są to, hamiltonian  $P^0$  opisujący ewolucję do czasów z  $t \neq 0$  oraz generatory pchnięć  $\vec{K}$ .

Możliwe są jednak alternatywne sformułowania teorii, które sklasyfikował Dirac [12, 17]. Jednym z nich jest sformułowanie teorii na froncie świetlnym, przez co rozumiemy użycie hiperpłaszczyzny stycznej do stożka świetlnego, konwencjonalnie daną przez warunek, by rolę czasu pełniła zmienna  $x^+ = x^0 + x^3 = 0$ . Podstawowe wiadomości sformułowania dynamiki na froncie świetlnym są podane w dodatku A. W teorii na froncie świetlnym jest aż 7 generatorów kinematycznych:  $P^+$ ,  $P^\perp$ ,  $M^{+-}$ ,  $M^{12}$  i  $M^{+\perp}$ , gdzie  $\perp = (1, 2)$ , oraz 3 generatory dynamiczne  $P^-$  i  $M^{-\perp}$ . Zwracamy uwagę na to, że w standardowym sformułowaniu jest 6 generatorów kinematycznych i 4 dynamiczne. Sformułowanie na froncie może nieść uproszczenia w opisie dynamiki. Z drugiej strony nic nie ma za darmo i przyjdzie nam zapłacić cenę za to uproszczenie w reprezentacji algebry (patrz następne rozdziały).

Główne korzyści wynikające z faktu istnienia aż 7 generatorów kinematycznych i tylko 3 dynamicznych to:

- Oddziaływania natychmiastowe obecne w hamiltonianie nie łamią zasady przyczynowości (w cechowaniu  $A^+ = 0$  w wyrażeniu na potencjał natychmiastowy pojawiają się jedynie odwrotności operatora  $\partial^+$ , a nie

odwrotności laplasjanu, jak to ma miejsce w wyrażeniu na potencjał Coulomba w cechowaniu  $A^0 = 0$  w standardowym sformułowaniu).

- W hamiltonianie nie występują oddziaływania zawierające wyłącznie operatory kreacji lub wyłącznie operatory anihilacji z dokładnością do tzw. modów zerowych. Dzieje się tak dzięki nieujemności zmiennej  $p^+$ . Jedynie w przypadku, gdy wszystkie kreowane lub anihilowane cząstki mają indywidualne pędy  $p^+ = 0$ , przypadek modów zerowych, to możliwa jest wyłączna kreacja lub wyłączna anihilacja cząstek. W naszych rozważaniach będziemy jednak wolni od tego problemu, bowiem rozważane przez nas oddziaływania będą w odpowiedni sposób zregularyzowane.
- Rolę energii w sformułowaniu na froncie świetlnym gra składowa  $p^-$ , która dla cząstek swobodnych ma postać  $p^- = (m^2 + p^{\perp 2})/p^+$ , co jest wyrażeniem nie zawierającym pierwiastków. Fakt ten ułatwia opis procesów kreacji i anihilacji cząstek, ponieważ nie ma potrzeby reinterpretacji stanów o ujemnych energiach. Ponadto można spełnić reguły komutacyjne bez konstruowania pierwiastka z operatora.
- W sformułowaniu na froncie świetlnym ruch układu zawsze można rozłożyć na ruch całości i ruch względny. Rozkład taki nie istnieje w relatywistycznym przypadku w sformułowaniu równoczesowym. Istnienie takiego rozkładu w sformułowaniu na froncie świetlnym jest istotne, bo umożliwi regularyzację poprzez ograniczenie tylko pędów względnych.
- Dzięki kinematyczności generatora  $M^{+-}$  i regularyzacji respektującej symetrię kinematyczne możliwe jest pchnięcie dowolnego stanu do układu nieskończonego pędu. Pozwala to wykorzystać osiągnięcia modelu partonowego do opisu procesów niskoenergetycznych i wyskokoenergetycznych procesów rozpraszania w jednym sformułowaniu teorii.

## 2.2 Kanoniczne generatory grupy Poincaré w KTP

Na przykładzie teorii skalarnej z oddziaływaniem  $g\phi^3$  zaprezentujemy konstrukcję efektywnej algebry Poincaré do rzędu  $g^2$ . Punktem wyjścia do takiej konstrukcji jest procedura kanoniczna, która dostarcza nam wyjściowych teoriopolowych wyrażeń na  $P^\mu$  i  $M^{\mu\nu}$ . Pożądane symetrie można wbudować w

teorię na poziomie klasycznego wyrażenia na gęstość lagranżjanu,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{3!} g \phi^3 . \quad (2.4)$$

Niezmienność  $\mathcal{L}$  względem symetrii przesunięć prowadzi do wyrażenia na gęstość tensora energii-pędu

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} . \quad (2.5)$$

Generatory  $P^\mu$  i  $M^{\mu\nu}$  zdefiniowane są następująco:

$$P^\mu = \frac{1}{2} \int d^2 x^\perp dx^- : \mathcal{T}^{+\mu} \Big|_{x^+=0} : , \quad (2.6)$$

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^2 x^\perp dx^- : (x^\mu \mathcal{T}^{+\nu} - x^\nu \mathcal{T}^{+\mu}) \Big|_{x^+=0} : . \quad (2.7)$$

W chwili  $x^+ = 0$ , pole  $\phi$  można rozłożyć na mody fourierowskie

$$\phi(x) = \int [p] (e^{ipx} a_p^\dagger + e^{-ipx} a_p) \Big|_{x^+=0} , \quad (2.8)$$

gdzie

$$[p] = \frac{dp^+ d^2 p^\perp}{16\pi^3 p^+} \theta(p^+) . \quad (2.9)$$

Współczynniki  $a_p^\dagger$  i  $a_p$  z (2.8) są kwantowane za pomocą reguł komutacyjnych.

$$[a_p, a_q^\dagger] = 16\pi^3 p^+ \delta^3(p - q) , \quad (2.10)$$

gdzie  $\delta^3(p - q) = \delta(p^+ - q^+) \delta^2(p^\perp - q^\perp)$ . Używając rozkładu (2.8) i dokonując, w wyrażeniach na  $P^\mu$  i  $M^{\mu\nu}$ , uporządkowania normalnego operatorów kreacji i anihilacji, przez co rozumiemy umieszczenie wszystkich operatorów kreacji na lewo od operatorów anihilacji i oznaczamy przez  $: : ,$  dostajemy wyrażenia na kwantowe generatory  $P^\mu$  i  $M^{\mu\nu}$ .

Generatory kinematyczne:

$$P^+ = \int [p] p^+ a_p^\dagger a_p , \quad (2.11)$$

$$P^i = \int [p] p^i a_p^\dagger a_p , \quad (2.12)$$

$$M^{+-} = -2i \int [p] p^+ \frac{\partial a_p^\dagger}{\partial p^+} a_p , \quad (2.13)$$

$$M^{+j} = i \int [p] p^+ \frac{\partial a_p^\dagger}{\partial p^j} a_p , \quad (2.14)$$

$$M^{12} = i \int [p] \left( p^1 \frac{\partial a_p^\dagger}{\partial p^2} a_p - p^2 \frac{\partial a_p^\dagger}{\partial p^1} a_p \right) \quad (2.15)$$

i dynamiczne:

$$P^- = P_0^- + gP_1^- = \int [p] p^- a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} g \int [123] \tilde{\delta} (a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + h.c.), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} M^{-j} = M_0^{-j} + gM_1^{-j} = i \int [p] & \left( p^- \frac{\partial a_p^\dagger}{\partial p^j} a_p + 2p^j \frac{\partial a_p^\dagger}{\partial p^+} a_p \right) \\ & + \left[ \frac{i}{2} g \int [123] \left( \frac{\partial}{\partial p_3^j} \tilde{\delta} \right) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + h.c. \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Przez  $[12..k]$  oznaczamy  $[p_1][p_2]..[p_k]$ , gdzie  $[p_i]$  jest dane przez (2.9). Symbol  $\tilde{\delta}$  w powyższych wyrażeniach to skrótowy zapis na

$$\tilde{\delta} \equiv 16\pi^3 \delta^3 \left( \sum_{i \in out} p_i - \sum_{j \in in} p_j \right), \quad (2.18)$$

gdzie zbiór *in* oznacza cząstki anihilowane podczas oddziaływania, natomiast *out* kreowane.

W przypadku teorii swobodnej, tj. gdy  $g = 0$ , relacje komutacyjne (2.1 - 2.3) są spełnione, ale dla  $g \neq 0$  tak nie jest. Wtedy bowiem iloczyn dowolnych dwóch spośród trzech operatorów  $P^-$ ,  $M^{-1}$  lub  $M^{-2}$  nie istnieje (jest nieskończony). Aby nadać sens tym wyrażeniom musimy je zregularyzować i robimy to przez dodanie odpowiedniego czynnika regularyzującego  $r_\Delta$ . Do zdefiniowania czynnika  $r_\Delta$  potrzebne nam będą odpowiednie zmienne,

$$x_{d/p} = \frac{k_d^+}{k_p^+} = \frac{x_d}{x_p}, \quad (2.19)$$

$$\kappa_{d/p}^\perp = k_d^\perp - x_{d/p} \cdot \quad (2.20)$$

Indeks  $d$  w powyższych wzorach oznacza pędu cząstki kreowanej lub anihilowanej w oddziaływaniu, a indeks  $p$  odnosi się do pędu „rodzica”, który można zdefiniować jako połowę sumy pędów wszystkich cząstek biorących udział w oddziaływaniu. Regularyzację  $r_\Delta$  definiujemy następująco [16]:

$$r_\Delta(p, d) = \tilde{r}_\Delta(p, d) \tilde{r}_\Delta(p, p - d), \quad (2.21)$$

gdzie

$$\tilde{r}_\Delta(p, d) = \tilde{r}_\Delta(\kappa_{d/p}^{\perp 2}). \quad (2.22)$$

W tej pracy czynnik  $\tilde{r}_\Delta$  wybieramy w postaci,

$$\tilde{r}_\Delta(\kappa^{\perp 2}) = \exp \left( -\frac{\kappa^{\perp 2}}{\Delta^2} \right). \quad (2.23)$$

Regularyzacja wprowadza do teorii sztuczny parametr  $\Delta$ , nieobecny w wyjściowej teorii lokalnej i oprócz tego parametru wprowadzamy zależność od regularyzacji w schemacie renormalizacji. Czynniki  $r_\Delta$  można wybrać na różne sposoby i ta postać została wybrana ze względu na prostotę i dlatego, że nie łamie kinematycznych symetrii frontu światłnego. Ponadto eksponencjalna zależność od pędu względnego regularyzuje wszystkie potęgowe funkcje, co jest istotne dla obliczeń w rachunku zaburzeń.

Zregularyzowane generatory  $P_{\Delta 1}^-$  i  $M_{\Delta 1}^{-j}$ ,  $j = 1, 2$ , przyjmują postać.

$$P_{\Delta 1}^- = \frac{1}{2} \int [123] \tilde{\delta} r_\Delta(3, 1) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + h.c. . \quad (2.24)$$

$$M_{\Delta 1}^{-j} = \frac{i}{2} \int [123] \left( \frac{\partial}{\partial p_3^j} \tilde{\delta} \right) r_\Delta(3, 1) a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 + h.c. . \quad (2.25)$$

Zależność  $r_\Delta$  jedynie od pędu względnego zapewnia, że są zachowane symetrie frontu światłnego, dzięki czemu relacje komutacyjne pomiędzy  $P_{\Delta 1}^-$  i  $M_{\Delta 1}^{-j}$ , a generatorami kinematycznymi są zachowane. Jedyne złamane relacje to

$$[P_{\Delta}^-, M_{\Delta}^{-j}] = B_{\Delta}^j , \quad (2.26)$$

dla  $j = 1, 2$ , oraz

$$[M_{\Delta}^{-1}, M_{\Delta}^{-2}] = B_{\Delta}^{12} . \quad (2.27)$$

$B_{\Delta}^j$  i  $B_{\Delta}^{12}$  powinny być równe zero, aby algebra była spełniona. Przykładowo podajemy postać  $B_{\Delta}^j$ ,

$$\begin{aligned} B_{\Delta}^j = & \left\{ \frac{i}{2} g \int [123] \left[ \sum_{l=1}^2 \left( p_l^- \frac{\partial}{\partial p_l^j} + 2p_l^j \frac{\partial}{\partial p_l^+} \right) r_\Delta(3, 1) \right] \tilde{\delta} a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 - h.c. \right\} \\ & + i g^2 \int [1234] \frac{\theta(p_1^+ - p_3^+)}{p_1^+ - p_3^+} \left\{ \frac{\partial}{\partial p^j} \left[ r_\Delta(1, p) r_\Delta(4, p) \right] \Big|_{p=p_1-p_3} \right\} \tilde{\delta} a_1^\dagger a_2^\dagger a_3 a_4 \\ & + \left\{ \frac{i}{2} g^2 \int [1234] \frac{1}{p_{12}^+} r_\Delta(p, 1) \left[ \frac{\partial}{\partial p^j} r_\Delta(4, p) \right] \Big|_{p=p_1+p_2} \right\} \tilde{\delta} a_1^\dagger a_2^\dagger a_3^\dagger a_4 - h.c. \right\} , \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdzie  $p_{12\dots}^{+,\perp} = p_1^{+,\perp} + p_2^{+,\perp} + \dots$ . Postać  $B_{\Delta}^{12}$  jest podobna.

Pokażemy, że RGPEP prowadzi do wyrażeń na zrenormalizowane generatory  $P_\lambda^\mu$  i  $M_\lambda^{\mu\nu}$  dla cząstek efektywnych, które nie zależą od regularyzacji i spełniają reguły komutacyjne do rzędu  $g^2$ . Ograniczenie do rzędu  $g^2$  wydaje się bardzo silne i osłabiające znaczenie rozwijanej teorii, należy jednak

zwrócić uwagę na fakt, że Dirac uważał zadanie znalezienia reguł komutacyjnych nawet do rzędu  $g^2$  za problem trudny do rozwiązania ze względu na nieliniowość równań (2.1-2.3) i wskazywał formalizm na froncie, jako szansę na próbę jego rozwiązania.

## 2.3 Procedura RGPEP

Procedura RGPEP pozwala na usunięcie rozbieżności ultrafioletowych poprzez znalezienie odpowiednich kontrczłonów  $X_\Delta$ , które dodaje się do zreregularyzowanych generatorów. W ten sposób otrzymuje się hamiltonian efektywny  $H_\lambda$  niezależny od zastosowanej regularyzacji  $r_\Delta$ . Przedstawiamy dla kompletności główne elementy tej procedury [9, 10].

Zregularyzowany hamiltonian  $H_\Delta$  z dodanymi do niego kontrczłonami  $X_\Delta$  może być zapisany za pomocą efektywnych operatorów kreacji i anihilacji  $a_\lambda^\dagger$  i  $a_\lambda$ , które wiążą się ze stopniami swobody  $a^\dagger$  i  $a$  wyjściowej kanonicznej teorii lokalnej poprzez transformację unitarną  $\mathcal{U}_\lambda$ . Zarówno kontrczłony  $X_\Delta$  jak i transformacja  $\mathcal{U}_\lambda$  są znajdowane w rachunku zaburzeń w stałej sprzężenia  $g$  teorii wyjściowej. Oznaczmy  $a_\lambda^\dagger$  lub  $a_\lambda$  przez  $q_\lambda$ , a  $a^\dagger$  lub  $a$  przez  $q$ . Wówczas mamy

$$q = \mathcal{U}_\lambda^\dagger q_\lambda \mathcal{U}_\lambda . \quad (2.29)$$

Zapisanie hamiltonianu za pomocą operatora  $q_\lambda$  nie zmienia  $H$  jako operatora, więc

$$H_\lambda(q_\lambda) = H(q) . \quad (2.30)$$

Korzystając z (2.29), dostajemy

$$\mathcal{H}_\lambda \equiv H_\lambda(q) = \mathcal{U}_\lambda^\dagger H_\lambda(q_\lambda) \mathcal{U}_\lambda . \quad (2.31)$$

Pomocniczy operator  $\mathcal{H}_\lambda$  ma te same współczynniki w rozwinięciu na sumę iloczynów  $q$ , jak  $H_\lambda(q_\lambda)$  w rozwinięciu na sumę iloczynów  $q_\lambda$ . Hamiltonian efektywny  $H_\lambda(q_\lambda)$  dostaniemy z  $\mathcal{H}_\lambda$  poprzez zamianę  $q$  na  $q_\lambda$ .

Transformacja  $\mathcal{U}_\lambda$  jest tak skonstruowana, że hamiltonian  $H_\lambda$  zawiera w członach oddziaływania czynniki kształtu (formfactory), co można zapisać jako

$$H_\lambda = f_\lambda G_\lambda , \quad (2.32)$$

gdzie  $G_\lambda$  to pewien operator, który znajdziemy z równań grupy renormalizacji zakładając użytecznie wybraną postać  $f_\lambda$ . Dla dowolnego operatora  $\hat{O}_\lambda$

$$\hat{O}_\lambda = \int [1..n \ n + 1 ..m] \tilde{\delta} v(1, \dots, m) a_{\lambda 1}^\dagger \cdots a_{\lambda n}^\dagger a_{\lambda n+1} \cdots a_{\lambda m} , \quad (2.33)$$

to  $f_\lambda \hat{O}_\lambda$  oznacza następujący operator

$$f_\lambda \hat{O}_\lambda = \int [1..n n + 1 ..m] \tilde{\delta} f_\lambda v(1, \dots, m) a_{\lambda 1}^\dagger \cdots a_{\lambda n}^\dagger a_{\lambda n+1} \cdots a_{\lambda m}, \quad (2.34)$$

gdzie dla przykładu

$$f_\lambda = \exp \left[ -\frac{(\mathcal{M}_{in}^2 - \mathcal{M}_{out}^2)^2}{\lambda^4} \right], \quad (2.35)$$

a  $\mathcal{M}^2$  oznacza kwadrat masy inwariantnej tj.  $\mathcal{M}^2 = (p_1 + \cdots + p_k)^2$ , gdzie  $p_i$  to czteropędy z grupy cząstek anihilowanych (*in*) lub z grupy cząstek kreowanych (*out*).  $\mathcal{M}^2$  oblicza się korzystając z  $p^- = (p^{\perp 2} + m^2)/p^+$ .

Wprowadzając pomocniczy operator  $\mathcal{G}_\lambda = G_\lambda(q)$ , podobnie jak to zrobiliśmy dla  $\mathcal{H}_\lambda$ , można pokazać, że

$$\mathcal{G}'_{I\lambda} = [f_\lambda \mathcal{G}_{I\lambda}, \{(1 - f_\lambda) \mathcal{G}_{I\lambda}\}'_{\mathcal{G}_0}], \quad (2.36)$$

gdzie  $\mathcal{G}_I = \mathcal{G} - \mathcal{G}_0$ , natomiast  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(g = 0)$ . Znak ' oznacza różniczkowanie po  $\lambda$ . Operator w nawiasie klamrowym jest zdefiniowany następująco, dla dowolnego operatora  $\hat{O}$  symbol  $\{\hat{O}\}_{\mathcal{G}_0}$  oznacza rozwiązanie równania  $[\{\hat{O}\}_{\mathcal{G}_0}, \mathcal{G}_0] = \hat{O}$ . Warunkiem początkowym dla (2.36) jest  $\mathcal{G}_\infty = H_\Delta + X_\Delta$ ,

$$\mathcal{G}_\lambda = \mathcal{G}_\infty + \int_\infty^\lambda ds [f_s \mathcal{G}_{Is}, \{(1 - f_s) \mathcal{G}_{Is}\}'_{\mathcal{G}_0}]. \quad (2.37)$$

Zauważmy, że we wzorze tym czynnik  $(1 - f_\lambda)$  zawsze występuje z korespondującą z nim różnicą mas inwariantnych,  $\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2$ . Wyjątkową cechą tego sformułowania jest to, że w rachunku zaburzeń nigdy nie pojawiają się małe różnice mas inwariantnych w mianowniku i dla małych stałych sprzężenia rachunek zaburzeń nie może generować dużych poprawek (silne efekty oddziaływania opisywane są dopiero w równaniu własnym dla hamiltonianu efektywnego). Brak małych mianowników osiąga się poprzez odpowiedni wybór czynnika  $f_\lambda$ .  $f_\lambda$  musi odpowiednio szybko zanikać jako funkcja  $\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2$ . W pracy dyskutujemy dwa wybory  $f_\lambda$ . Pierwszy dany wzorem (2.35), który w przypadku gdy  $\mathcal{M}_a^2 \rightarrow \mathcal{M}_b^2$ , prowadzi do następującego zachowania

$$\frac{1 - f_\lambda}{\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2} = \frac{\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2}{\lambda^4} + \cdots. \quad (2.38)$$

Jak widać taki wybór zabezpiecza nas przed pojawieniem się małych mianowników. Drugi wybór to

$$f_\lambda = \exp \left[ -\frac{(\mathcal{M}_{in} - \mathcal{M}_{out})^2}{\lambda^2} \right], \quad (2.39)$$

który w tej samej granicy  $\mathcal{M}_a^2 \rightarrow \mathcal{M}_b^2$  prowadzi do

$$\frac{1 - f_\lambda}{\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2} = \frac{\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b}{\lambda^2(\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b)} - \frac{(\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b)^3}{2\lambda^4(\mathcal{M}_a + \mathcal{M}_b)} + \dots \quad (2.40)$$

W tym przypadku w granicy, gdy  $\mathcal{M}_a^2 \rightarrow 0$  i  $\mathcal{M}_b^2 \rightarrow 0$ , pierwszy wyraz rozwinięcia nie zanika, jak to jest w przypadku (2.38), a dąży do  $1/\lambda^2$ . Powstaje więc obawa, czy drugi wybór nie będzie prowadził do generacji marginalnych operatorów podczas procedury renormalizacji. Obliczenia numeryczne jakie przeprowadziliśmy nie potwierdzają tej obawy, a wręcz przeciwnie, pokazują zalety takiego wyboru. Jest to też zgodne z wynikami pracy w której zaobserwowano, że wolniejszy zanik  $f_\lambda$  może pomagać w uzbieżnieniu rachunku zaburzeń [20].

Równanie (2.37) możemy rozwiązywać rząd po rzędzie w  $g$  rozwijając  $\mathcal{G}_I$  w szereg potęgowy w  $g$ ,

$$\mathcal{G}_I = \sum_{n=0}^{\infty} g^n \tau_n. \quad (2.41)$$

W pierwszym rzędzie dostajemy

$$\tau_1' = 0, \quad (2.42)$$

co po odcałkowaniu daje

$$\tau_{\lambda 1} = \tau_{\infty 1}. \quad (2.43)$$

W tym rzędzie żadne kontreczłony nie są potrzebne. W rozważanym przez nas przypadku teorii  $\phi^3$  w pierwszym rzędzie otrzymujemy (po uwzględnieniu (2.31) i (2.32))

$$P_{1\lambda}^- = f_\lambda \tau_{\lambda 1}(q \rightarrow q_\lambda) = \frac{1}{2} \int [123] \tilde{\delta} f_\lambda a_{\lambda 1}^\dagger a_{\lambda 2}^\dagger a_{\lambda 3} + h.c. \quad (2.44)$$

W drugim rzędzie mamy

$$\tau_2' = [\{f'\tau_1\}, f\tau_1] = f_2[\tau_1\tau_1], \quad (2.45)$$

gdzie  $f_2 = \{f'\}f - f\{f'\}$ . Pierwszy wyraz z  $f$  w  $f_2$  odnosi się do pierwszego operatora,  $\tau_1$ , w nawiasie kwadratowym. Nawias kwadratowy oznacza wszystkie połączone diagramy powstałe z normalnego uporządkowania iloczynu  $\tau_1\tau_1$ .



Przedstawmy  $\tau_1$  jako  $\tau_1 = \alpha_{21} + \alpha_{12}$ , gdzie  $\alpha_{21}$  oznacza część  $\tau_1$  z dwoma operatorami kreacji i jednym anihilacji i analogicznie przedstawimy  $\tau_2$ ,

$$\tau_2 = \beta_{11} + \beta_{31} + \beta_{13} + \beta_{22}. \quad (2.46)$$

Wówczas mamy

$$\beta_{\lambda 11} = 2\mathcal{F}_{2\lambda}[\alpha_{12}\alpha_{21}]_{11} + \beta_{\infty 11}, \quad (2.47)$$

$$\beta_{\lambda 31} = 2\mathcal{F}_{2\lambda}[\alpha_{21}\alpha_{21}]_{31}, \quad (2.48)$$

$$\beta_{\lambda 13} = 2\mathcal{F}_{2\lambda}[\alpha_{12}\alpha_{12}]_{13}, \quad (2.49)$$

$$\beta_{\lambda 22} = \mathcal{F}_{2\lambda}[\alpha_{21}\alpha_{12} + 4\alpha_{12}\alpha_{21}]_{22}, \quad (2.50)$$

gdzie

$$\mathcal{F}_{2\lambda} = \int_{\infty}^{\lambda} ds f_2. \quad (2.51)$$

W przypadku gdy  $f_{\lambda} = \exp(-ab^2/\lambda^4)$ , otrzymujemy

$$\mathcal{F}_{2\lambda}(a, b, c) = \frac{p_{ba}^+ ba + p_{bc}^+ bc}{ba^2 + bc^2} (f_{ab} f_{bc} - 1), \quad (2.52)$$

gdzie  $ab = \mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2$ . Prowadzi to do następującego wyrażenia na  $P_{\lambda 2}^-$

$$\begin{aligned} P_{\lambda 2}^- &= \int [p] \frac{\delta m_{\lambda}^2}{p^+} a_{\lambda p}^{\dagger} a_{\lambda p} \\ &+ \int [1234] [f_{\lambda} \tilde{\delta} V_{\lambda}^{22} a_{\lambda 1}^{\dagger} a_{\lambda 2}^{\dagger} a_{\lambda 3} a_{\lambda 4} + (f_{\lambda} \tilde{\delta} V_{\lambda}^{31} a_{\lambda 1}^{\dagger} a_{\lambda 2}^{\dagger} a_{\lambda 3}^{\dagger} a_{\lambda 4} + h.c.)], \end{aligned} \quad (2.53)$$

gdzie

$$V_{\lambda}^{22} = \frac{1}{4p_{12}^+} \mathcal{F}_{2\lambda}^{22s} + \frac{\theta(p_1^+ - p_3^+)}{p_1^+ - p_3^+} \mathcal{F}_{2\lambda}^{22ex}, \quad (2.54)$$

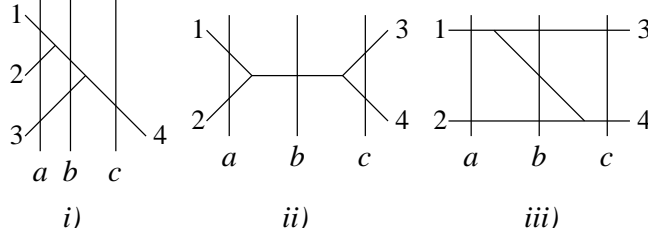
$$V_{\lambda}^{31} = \frac{1}{2p_{12}^+} \mathcal{F}_{2\lambda}^{31}. \quad (2.55)$$

Czynniki  $\mathcal{F}_{2\lambda}^{22s}$ ,  $\mathcal{F}_{2\lambda}^{22ex}$  i  $\mathcal{F}_{2\lambda}^{31}$  odpowiadają odpowiednim konfiguracjom przedstawionym na rys. 2.2.

$$P_{\lambda 1}^- = f_\lambda \left( \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right)$$

$$P_{\lambda 2}^- = \frac{\times}{\delta m_\lambda^2 / p^+} + \left[ f_\lambda \left( \underbrace{\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + \begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array}}_{V_\lambda^{22}} \right) + \left( f_\lambda \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + h.c. \right) \right] V_\lambda^{31}$$

Rysunek 2.1: Graficzne przedstawienie członów oddziaływania w  $P_\lambda^-$  rzędu  $g$  i  $g^2$ .



Rysunek 2.2: Ilustracja członów oddziaływania zawierających czynniki: *i)*  $\mathcal{F}_{2\lambda}^{31}$ ; *ii)*  $\mathcal{F}_{2\lambda}^{22s}$ ; *iii)*  $\mathcal{F}_{2\lambda}^{22ex}$ .

## 2.4 Uogólnienie na całą algebrę Poincaré

Procedurę RGPEP można uogólnić na wszystkie generatory grupy Poincaré [18]. Robimy to znajdując jawnie  $\mathcal{U}_\lambda$ , dzięki czemu wyrażamy operatory  $q$  w teorii wyjściowej przez operatory cząstek efektywnych  $q_\lambda$ . Jawną postać  $\mathcal{U}_\lambda$  można znaleźć wykorzystując (2.31) i (2.36). Dostajemy równanie różniczkowe na  $\mathcal{U}_\lambda$ .

$$\mathcal{U}'_\lambda = \mathcal{U}_\lambda \{ (1 - f_\lambda) \mathcal{G}_{I\lambda} \}'_{g_0} . \quad (2.56)$$

Warunkiem początkowym jest  $\mathcal{U}_\lambda = 1$  dla  $\lambda = \infty$ . Równanie (2.56) rozwiązuje się w rachunku zaburzeń podobnie jak (2.36). Wyrażmy  $q$  jako szereg potęgowy w  $g$ , wówczas

$$q_0 = q_\lambda . \quad (2.57)$$

$$q_1 = [q_\lambda, u_{\lambda 1}] , \quad (2.58)$$

$$q_2 = [q_\lambda, v_{\lambda 2}] + \frac{1}{2} [[q_\lambda, u_{\lambda 1}], u_{\lambda 1}] , \quad (2.59)$$

gdzie

$$u_1 = (1 - f_\lambda) \mathcal{G}_1, \quad (2.60)$$

$$u_2 = \frac{1}{2} u_1^2 + v_2, \quad (2.61)$$

$$v_2 = \{(1 - f) \mathcal{G}_2\} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\lambda} ds [u_{s1}, u'_{s1}]. \quad (2.62)$$

Dla przykładu

$$a_{1p}^\dagger = \int [12] \left[ -\frac{1}{2} \tilde{\delta}(p - p_{12}) r_{p,1} \frac{1 - f_{12}}{p^- - p_{12}^-} a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger \right. \\ \left. + \tilde{\delta}(p_2 - p_{1p}) r_{2,p} \frac{1 - f_{1p}}{p_2^- - p_{1p}^-} a_{\lambda_2}^\dagger a_{\lambda_1}^\dagger \right], \quad (2.63)$$

$$a_{2p}^\dagger = -\frac{1}{64\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\mathcal{M}_0^2} d\mathcal{M}^2 \frac{(1 - f_\lambda)^2}{(\mathcal{M}^2 - m^2)^2} r_\Delta^2 a_{\lambda p}^\dagger \\ - \int [123] \left\{ \frac{1}{2} r_{1+2,1} r_{p,3} \frac{1}{p_{12}^+} a_+^{31}(123p) \tilde{\delta}(p - p_{123}) a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger a_{\lambda_3}^\dagger \right. \\ + \left[ r_{1,3} r_{p,2} \frac{\theta(p_1^+ - p_3^+)}{p_1^+ - p_3^+} a_+^{22ex}(123p) + r_{1+2,1} r_{3+p,3} \frac{1}{2p_{12}^+} a_+^{22s}(123p) \right. \\ \left. + r_{1,p} r_{3,2} \frac{\theta(p_1^+ - p^+)}{p_1^+ - p^+} a_-^{22ex}(12p3) \right] \tilde{\delta}(p_{3p} - p_{12}) a_{\lambda_1}^\dagger a_{\lambda_2}^\dagger a_{\lambda_3} \\ - \left[ r_{1+p,1} r_{3,2} \frac{1}{p_{1p}^+} a_-^{31}(p123) + \frac{1}{2} r_{1+2,1} r_{3,p} \frac{1}{p_{12}^+} a_+^{31}(12p3) \right] \\ \left. \times \tilde{\delta}(p_3 - p_{12p}) a_{\lambda_3}^\dagger a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} \right\}, \quad (2.64)$$

gdzie

$$a_\pm = \mathcal{B} \pm \mathcal{C}, \quad (2.65)$$

$$\mathcal{B} = p_{ac}^+ \frac{1 - f_{ac}}{ca} \mathcal{F}_2(a, b, c) \\ - \frac{1}{2} \frac{p_{ab}^+ p_{bc}^+}{ba bc} \left[ f_{ab} - f_{bc} - \frac{ba^2 - bc^2}{ba^2 + bc^2} (f_{ab} f_{bc} - 1) \right], \quad (2.66)$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} \frac{p_{ab}^+ p_{bc}^+}{ba bc} (1 - f_{ab})(1 - f_{bc}). \quad (2.67)$$

Indeksy w nawiasach w wyrażeniach na  $r_{i(jk)}$  lub  $r_{i(j-k)}$  oznaczają, że  $\kappa^\perp$  występujące jako argument funkcji  $r_\Delta$  jest obliczane jako pęd względny cząstki  $i$  i drugiej cząstki o pędzie  $p_j + p_k$  lub  $p_j - p_k$ .

$$\begin{aligned}
a_{1p}^\dagger &= \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \text{---} p + \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \text{---} p \\
a_{2p}^\dagger &= \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ \text{---} \end{array} p + 2 \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 3 \end{array} \text{---} p + 3 \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 3 \end{array} \text{---} p + 3 \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \text{---} p \\
&+ \begin{array}{c} 1 \text{---} 3 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \text{---} p \end{array} + \begin{array}{c} 1 \text{---} p \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ 2 \text{---} 3 \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \end{array} \text{---} 3 \text{---} p
\end{aligned}$$

Rysunek 2.3: Symboliczna reprezentacja wyrażeń na  $a^\dagger$ . Linie kropkowane pokazują w jaki sposób do wzorów (2.63) i (2.64) wchodzi pęd  $p$ .

Gdy znamy zależność  $q(q_\lambda)$ , możemy obliczyć wszystkie generatory grupy Poincaré według wzoru,

$$\tilde{A}_\infty[q(q_\lambda)] = \tilde{A}_\lambda(q_\lambda). \quad (2.68)$$

Podstawienie to prowadzi do pojawienia się rozbieżności ultrafioletowych w wyrażeniach na generatory  $M^{-1}$  i  $M^{-2}$ , tak jak to jest w przypadku  $P^-$ , rozbieżności te wymagają dodatkowych kontrczłonów  $X_\Delta$ , które pozwalają na usunięcie rozbieżności.

$$\tilde{A}_\infty(q) = A_\Delta + X_\Delta. \quad (2.69)$$

Gdy kontrczłony  $X_\Delta$  są już znalezione, wówczas możemy przejść do granicy  $\Delta \rightarrow \infty$  w wyrażeniu na  $\tilde{A}_\infty(q)$ , dzięki czemu otrzymujemy wyrażenie na efektywny generator  $A_\lambda$ .

$$A_\lambda(q_\lambda) = \tilde{A}_\lambda(q_\lambda) \Big|_{r_\Delta=1}. \quad (2.70)$$

W przypadku teorii skalarnej w generatorach  $M^{-\perp}$  potrzebny jest jedynie kontrczłon masowy, który okazuje się być identyczny dla  $P^-$  jak i  $M^{-\perp}$ . Efektywne generatory dynamiczne  $M_\lambda^{-1}$  i  $M_\lambda^{-2}$  uzyskują postać, w której człony z oddziaływaniem mają czynniki kształtu, tak jak to było w przypadku  $P_\lambda^-$ .

$$M_{\lambda 1}^{-j} = f_\lambda M_1^{-j}(q \rightarrow q_\lambda), \quad (2.71)$$



części skończonej kontrczłonu masowego. W tak dobranej procedurze w wyrażeniach na  $P_{\lambda 2}^-$ ,  $M_{\lambda 2}^{-j}$  i  $M_{\lambda 2}^{-j}$  mamy identyczne wyrażenie na masę  $\delta m_\lambda^2$ .

$$\delta m_\lambda^2 = \delta m_0^2 + \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \int_{\mathcal{M}_0^2}^\infty d\mathcal{M}^2 \frac{f_\lambda^2 - f_{\lambda_0}^2}{\mathcal{M}^2 - m^2}, \quad (2.75)$$

gdzie  $\mathcal{M}_0^2 = m^2/[x(1-x)]$ .

Efektywne generatory kinematyczne różnią się od swoich odpowiedników w wyjściowej teorii tylko zamianą  $q$  na  $q_\lambda$ .

Otrzymujemy w ten sposób pełną algebrę Poincaré spełnioną do rzędu  $g^2$ . W szczególności oznacza to, że odtwarzamy w oddziałującej teorii na froncie świetlnym algebrę momentu pędu  $J_\lambda^1 = 1/2(M_\lambda^{-2} - M_\lambda^{+2})$ ,  $J_\lambda^2 = -1/2(M_\lambda^{-1} - M_\lambda^{+1})$ ,  $J_\lambda^3 = M_\lambda^{12}$  [17],

$$[J_\lambda^i, J_\lambda^j] = i\epsilon_{ijk} J_\lambda^k + o(g^3). \quad (2.76)$$

Związek (2.76) jest szczególnie istotny w analizie równania własnego dla stanów związanych. Jednakże występujące w nim generatory obrotów działają w całej przestrzeni Fock'a. W rachunkach stanów związanych staramy się przybliżyć wiązanie się cząstek przez modelowe równanie dla skończonej liczbie cząstek efektywnych w stanie związanym. Z tego powodu potrzebne jest dodatkowo przejście od (2.76) do modelowych generatorów obrotów w przestrzeni ze skończoną liczbą cząstek.

Na tym kończymy opis schematu postępowania na przykładzie teorii skalarnej. Analiza teorii z cechowaniem w zastosowaniu do gluonium będzie podana w następnym rozdziale.

# Rozdział 3

## QCD na froncie świetlnym

Lagranżjan QCD dany jest wzorem,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\Psi}(\not{D} + m)\Psi - \frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (3.1)$$

gdzie  $\not{D} = \not{\partial} + ig\not{A}$ ,  $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + ig[A^\mu, A^\nu]$ ,  $A^\mu = A^{a\mu}T^a$ .  $T^a$  są to generatory grupy SU(3) spełniające  $[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$ .  $g$  jest stałą sprzężenia QCD. Interesuje nas konstrukcja gluonów efektywnych. Stała sprzężenia w teorii z samymi gluonami zachowuje się podobnie jak dla kwarków (o ile zapachów kwarków jest nie więcej niż 16). Mechanizm powstawania gluonów efektywnych jest w dużej części niezależny od kwarków. Z tych powodów, oraz by uniknąć niekoniecznych komplikacji, w niniejszej pracy będziemy zajmować się czystą gluodynamiką, drugą część  $\mathcal{L}_{QCD}$  oznaczamy przez  $\mathcal{L}_{QCDg}$ .

### 3.1 $H_{QCDg}$ na froncie świetlnym

Z klasycznego lagranżjanu  $\mathcal{L}_{QCDg}$  wynikają następujące równania ruchu:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = ig[F^{\rho\nu}, A^\rho], \quad (3.2)$$

których użycie prowadzi do następującego wyrażenia na gęstość tensora energii-pędu,

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -F^{\mu\rho}\partial^\nu A_\rho + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\text{Tr}(F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}). \quad (3.3)$$

Wybierając cechowanie  $A^{c+} = 0$  ( $c$  oznacza indeks kolorowy) i eliminując  $A^-$  dzięki równaniom ruchu (3.2), można wyrazić  $\mathcal{H}$  za pomocą niezależnych stopni swobody  $A^{c\perp}$ .  $\mathcal{H}$  zapisuje się jako suma czterech składników [21].

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{A^2} + \mathcal{H}_{A^3} + \mathcal{H}_{A^4} + \mathcal{H}_{(A\partial A)^2}, \quad (3.4)$$

gdzie:

$$\mathcal{H}_{A^2} = -2Tr (A^i(\partial^\perp)^2 A^i) , \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H}_{A^3} = 4g i\partial_\mu Tr(A^\nu[A^\mu, A^\nu]) , \quad (3.6)$$

$$\mathcal{H}_{A^4} = -g^2 Tr([A_\mu, A_\mu][A^\nu, A^\nu]) , \quad (3.7)$$

$$\mathcal{H}_{(A\partial A)^2} = 2g^2 Tr \left( [i\partial^+ A^\mu, A^\mu] \frac{1}{(i\partial^+)^2} [i\partial^+ A^\nu, A^\nu] \right) . \quad (3.8)$$

Indeksy łacińskie  $i, j, \dots$  oznaczają kierunki prostopadłe  $\perp$ .

Część kwadratowa w polach  $A$  ma postać analogiczną jak w przypadku QED. Pozostałe części są zależne od stałej sprzężenia  $g$  i wynikają z nieabelowej natury QCD. Ostatni składnik  $\mathcal{H}_{(A\partial A)^2}$  jest charakterystyczny dla sformułowania teorii na froncie świetlnym i odpowiada natychmiastowemu oddziaływaniu Coulomba.

### 3.1.1 Kwantyzacja

Formułę na kwantowy hamiltonian otrzymamy w wyniku kilkustopniowej procedury, traktując klasyczne wyrażenie (3.4) jako punkt startowy. Pierwszym krokiem na drodze do kwantowego hamiltonianu jest rozkład pola  $A^\perp$  na mody fourierowskie  $a_{p\sigma c}^\dagger$  i  $a_{p\sigma c}$ , które mają interpretację operatorów kreacji i anihilacji punktowych gluonów.

$$A^{\perp}(x) = \sum_{\sigma c} \int [p] \left( \varepsilon_{p\sigma}^\perp e^{-ipx} a_{p\sigma c} + \varepsilon_{p\sigma}^{\perp*} e^{ipx} a_{p\sigma c}^\dagger \right) \Big|_{x^+=0} , \quad (3.9)$$

gdzie  $c$  jest indeksem kolorowym zmieniającym się od 1 do 8,  $\sigma$  numeruje stany polaryzacji gluonów, które są dwa, bo gluony są bezmasowymi cząstkami o spinie 1. Na operatory kreacji i anihilacji narzucamy następujące relacje komutacyjne,

$$\left[ a_{p\sigma c}, a_{p'\sigma'c'}^\dagger \right] = 16\pi^3 \delta_{cc'} \delta_{\sigma\sigma'} p^+ \delta^3(p - p') . \quad (3.10)$$

Komutatory pomiędzy dwoma operatorami kreacji albo dwoma operatorami anihilacji są równe zeru.

### 3.1.2 Regularyzacja

Formalne wyrażenia na hamiltonian dane wzorami (3.4-3.8) wymagają regularyzacji. W przypadku QCDg sformułowanej na froncie świetlnym potrzebujemy dwóch rodzajów regulatorów, ultrafioletowego i regularyzacji małych  $x$ .



Regularyzację ultrafioletową wprowadzimy w ten sam sposób jak w przypadku teorii skalarnej, stosując wzory (2.19-2.23), poprzez narzucenie ograniczenia na pęd względny cząstek,  $\kappa^\perp$ , a pędy całkowite pozostawiając bez ograniczeń.

Drugi rodzaj rozbieżności w chromodynamice kwantowej to rozbieżności małych  $x$ , będące charakterystyczną cechą teorii z cechowaniem na froncie świetlnym. Każda nowo kreowana czy anihilowana cząstka przyczynia się do ich powstawania. Rozbieżności małych  $x$  są niezależne od zachowania ultrafioletowego i procedura RGPEP nie eliminuje ich w trakcie wyliczania oddziaływań cząstek efektywnych, tak jak to robi w przypadku rozbieżności ultrafioletowych poprzez sprowadzenie do efektywnych oddziaływań. Wobec tego występują w oddziaływaniach i biorą udział w obliczeniach stanów związanych. Rozbieżności małych  $x$  mieszają się z niskoenergetyczną częścią QCD, która odpowiada za powstawanie stanów związanych. Ich istnienie czyni analizę dynamiki efektywnej gluonów trudną. Zobaczmy jednak w dalszej części, że istnienie tych rozbieżności może prowadzić nas do zapostulowania takich oddziaływań między gluonami efektywnymi, które mają cechy pożądane w fenomenologii hadronów. Małe  $x$  odpowiada dużym odległościom wzdłuż frontu i prowadzi do silnego wzrostu energii w teorii efektywnych gluonów wtedy, gdy rozmiary rozpatrywanego układu są duże również w kierunkach prostopadłych. Taki wzrost energii z odległością między gluonami pozwoli nam rozpatrzyć sprzężony układ dwóch i trzech gluonów efektywnych (bez możliwości kreowania wielu gluonów) i opisać zjawisko wiązania gluonów w relatywistyczny sposób za pomocą uproszczonego równania Schrödriger'a dla gluonium zbudowanego z dwóch gluonów efektywnych.

Czynnik regularyzujący obszar małych  $x$  wybierzemy następująco [21]:

$$r_\epsilon(p, d) = \tilde{r}_\epsilon(p, d)\tilde{r}_\epsilon(p, p-d), \quad (3.11)$$

gdzie

$$\tilde{r}_\epsilon(p, d) = \tilde{r}_\epsilon(x_{d/p}), \quad (3.12)$$

a  $x_{d/p}$  jest częścią pędu podłużnego „rodzica”  $p$  niesioną przez cząstkę  $d$  i jest dane przez (2.19). Funkcję  $\tilde{r}_\epsilon(x)$  można wybrać jako

$$\tilde{r}_\epsilon(x) = x^\epsilon. \quad (3.13)$$

Całkowita regularyzacja będzie iloczynem regularyzacji ultrafioletowej i małych  $x$ .

$$r_{\Delta\epsilon}(p, d) = r_\Delta(p, d)r_\epsilon(p, d). \quad (3.14)$$

Dla uproszczenia wyrażeń będziemy czasem stosować  $r_{p,d}$  zamiast  $r_{\Delta\epsilon}(p, d)$ .



$$\begin{aligned}
W(1234) = & \frac{1}{4} f^{ac_1c_2} f^{ac_3c_4} r_{1+2,1} r_{3+4,3} \left( \varepsilon_1^{\perp*} \varepsilon_3^{\perp} \varepsilon_2^{\perp*} \varepsilon_4^{\perp} - \varepsilon_1^{\perp*} \varepsilon_4^{\perp} \varepsilon_2^{\perp*} \varepsilon_3^{\perp} \right) \\
& - f^{ac_1c_3} f^{ac_2c_4} \theta(x_1 - x_3) r_{1,3} r_{4,2} \left( \varepsilon_1^{\perp*} \varepsilon_2^{\perp*} \varepsilon_3^{\perp} \varepsilon_4^{\perp} - \varepsilon_1^{\perp*} \varepsilon_4^{\perp} \varepsilon_2^{\perp*} \varepsilon_3^{\perp} \right), \quad (3.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z(1234) = & \frac{1}{4} f^{ac_1c_2} f^{ac_3c_4} r_{1+2,1} r_{3+4,3} \frac{(p_1^+ - p_2^+)(p_3^+ - p_4^+)}{(p_1^+ + p_2^+)^2} \varepsilon_1^{\perp*} \varepsilon_2^{\perp*} \varepsilon_3^{\perp} \varepsilon_4^{\perp} \\
& - f^{ac_1c_3} f^{ac_2c_4} \theta(x_1 - x_3) r_{1,3} r_{4,2} \frac{(p_1^+ + p_3^+)(p_2^+ + p_4^+)}{(p_1^+ - p_3^+)^2} \varepsilon_1^{\perp*} \varepsilon_3^{\perp} \varepsilon_2^{\perp*} \varepsilon_4^{\perp}. \quad (3.22)
\end{aligned}$$

### 3.3 Hamiltonian efektywny QCDg 2-go rzędu

Procedura RGPEP zastosowana do hamiltonianu  $H_{\Delta\epsilon}$  pozwala wyliczyć hamiltonian efektywny  $H_{\lambda\epsilon}$  dla gluonów efektywnych. Formfaktory powodują, że oddziaływania gluonów efektywnych szybko znikają z przekazem pędu i są nieczułe na regularyzację w wyjściowym hamiltonianie  $H_{\Delta\epsilon}$ . Dzięki temu  $H_{\lambda\epsilon}$  nie zależy już od apriorycznego obciążenia  $\Delta$ . Fakt ten jest podkreślony przez naszą notację, gdzie pozostawiliśmy tylko indeks  $\epsilon$  oznaczający regularyzację małych  $x$ , a symbolu  $\Delta$  reprezentującego regularyzację ultrafioletową już nie ma.

Powstaje pytanie, do którego rzędu trzeba wyliczyć hamiltonian efektywny, aby stany związane odpowiadały chromodynamice kwantowej, a nie były wynikiem przypadkowych przybliżeń. Uproszczone modele numeryczne, w których dostępne są ścisłe rozwiązania [22, 23] wskazują, że rachunek zaburzeń do niskiego rzędu może odtwarzać ścisłe wyniki na energie stanów związanych wtedy, gdy stała sprzężenia w strukturze hamiltonianu do drugiego rzędu przyjmuje dużą wartość (porównywalną z 1), parametr  $\lambda$  jest rzędu energii poszukiwanych stanów związanych i wybrana wartość  $g$  w  $H_{\lambda\epsilon}$  odpowiada wartości stałej sprzężenia, którą otrzymuje się ze ścisłych obliczeń  $H_\lambda$ , w pełnej teorii. W przypadku QCD nie znamy ścisłego rozwiązania i postępujemy przez analogię do ściśle rozwiązywalnych modeli z asymptotyczną swobodą, w których obecne są stany związane.

Człony w hamiltonianie efektywnym rzędu 1,  $g$  i  $g^2$  mają postać (z dokładnością do członów istotnych dla równania własnego do rzędu  $g^2$ ):

$$H_{\lambda\epsilon} = T_\lambda + T_{\lambda\epsilon}^{\delta m^2} + f_\lambda(Y_{\lambda\epsilon} + W_{\lambda\epsilon} + Z_{\lambda\epsilon} + V_{\lambda\epsilon}). \quad (3.23)$$

Operatory  $T_\lambda$ ,  $Y_\lambda$ ,  $W_\lambda$  i  $Z_\lambda$  różnią się od operatorów  $T$ ,  $Y$ ,  $W$  i  $Z$  tym, że gołe operatory kreacji i anihilacji zostały zastąpione przez operatory kreacji i anihilacji odpowiadające skali  $\lambda$ . Natomiast poprawka do masy  $T_\lambda^{\delta m^2}$

i oddziaływanie przez wymianę gluonu  $V_\lambda$  są wynikiem transformacji podobieństwa.

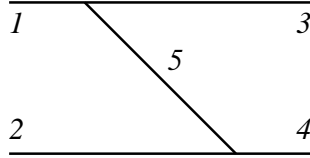
$$T_{\lambda\epsilon}^{\delta m^2} = N_c g^2 \sum_{\sigma c} \int [p][x\kappa] \frac{1}{p^+} \times \left( e^{-\frac{2M^2}{\lambda^2}} - e^{-\frac{2M^2}{\lambda_0^2}} \right) \tilde{r}_\epsilon^2(x) \left[ \frac{1-x}{x} + \frac{x}{1-x} + x(1-x) \right] a_{\lambda p \sigma c}^\dagger a_{\lambda p \sigma c}, \quad (3.24)$$

gdzie  $\tilde{r}_\epsilon(x)$  jest dane przez (3.13).  $N_c = 3$  (grupa  $SU(3)$ ). Czynniki z eksponentami w nawiasie pochodzą z RGPEP, przy czym czynnik z  $\lambda_0$  jest wygodnym zapisem części skończonej kontreczłonu.  $[p]$  oznacza miarę całkowania po pędach cząstek efektywnych, natomiast symbol  $[x\kappa]$  oznacza miarę całkowania po wewnętrznych zmiennych w pętli masowej (patrz dodatek A). Pełny wynik RGPEP na  $V_{\lambda\epsilon}$  ma postać,

$$V_{\lambda\epsilon} = g^2 \sum_{1234} \int [1234] \tilde{\delta} V_{\lambda\epsilon}(12, 34) a_{\lambda 1}^\dagger a_{\lambda 2}^\dagger a_{\lambda 3} a_{\lambda 4}. \quad (3.25)$$

$$V_{\lambda\epsilon}(12, 34) = f^{ac_1 c_2} f^{ac_3 c_4} r_{1,2} r_{3,4} (ff - 1) \tilde{\mathcal{F}}_2^s v^s(12, 34) + 4 f^{ac_1 c_3} f^{ac_2 c_4} \theta(x_1 - x_3) r_{3,1-3} r_{2,4-2} (ff - 1) \tilde{\mathcal{F}}_2 v(12, 34). \quad (3.26)$$

Człon z  $v^s(12, 34)$  nie daje wkładu do równania własnego dla stanu dwu



Rysunek 3.2: Graficzna ilustracja oddziaływania  $V_{\lambda\epsilon}$ . Na rysunku zaznaczono również indeksy pędów cząstek.

gluonów nie niosącego koloru netto z powodu czynnika kolorowego  $f^{ac_1 c_2} f^{ac_3 c_4}$  i nie występuje w dalszych rozważaniach. Postać  $v(12, 34)$  jest następująca

$$v(12, 34) = v_{div}(12, 34) + v_{fin}(12, 34), \quad (3.27)$$

$v_{div}$  jest funkcją rozbieżną dla małych  $x$  w odróżnieniu od  $v_{fin}$ , które jest skończone.

$$v_{div}(12, 34) = \varepsilon_1^{\perp*} \varepsilon_3^{\perp} \varepsilon_2^{\perp*} \varepsilon_4^{\perp} \frac{\alpha^{\perp} \beta^{\perp}}{(x_1 - x_3)^2}, \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned}
v_{fin}(12, 34) = & -\frac{1}{x_1x_2}\varepsilon_1^{\perp*}\alpha^{\perp}\varepsilon_2^{\perp*}\beta^{\perp}\varepsilon_3^{\perp}\varepsilon_4^{\perp} + \frac{1}{x_1x_4}\varepsilon_1^{\perp*}\alpha^{\perp}\varepsilon_4^{\perp}\beta^{\perp}\varepsilon_2^{\perp*}\varepsilon_3^{\perp} \\
& + \frac{1}{x_2x_3}\varepsilon_3^{\perp}\alpha^{\perp}\varepsilon_2^{\perp*}\beta^{\perp}\varepsilon_1^{\perp*}\varepsilon_4^{\perp} - \frac{1}{x_3x_4}\varepsilon_3^{\perp}\alpha^{\perp}\varepsilon_4^{\perp}\beta^{\perp}\varepsilon_1^{\perp*}\varepsilon_2^{\perp*} \\
& - \frac{1}{x_1x_5}\varepsilon_1^{\perp*}\alpha^{\perp}\varepsilon_3^{\perp}\beta^{\perp}\varepsilon_2^{\perp*}\varepsilon_4^{\perp} + \frac{1}{x_2x_5}\varepsilon_4^{\perp}\alpha^{\perp}\varepsilon_2^{\perp*}\beta^{\perp}\varepsilon_1^{\perp*}\varepsilon_3^{\perp} \\
& + \frac{1}{x_3x_5}\varepsilon_3^{\perp}\alpha^{\perp}\varepsilon_1^{\perp*}\beta^{\perp}\varepsilon_2^{\perp*}\varepsilon_4^{\perp} - \frac{1}{x_4x_5}\varepsilon_2^{\perp*}\alpha^{\perp}\varepsilon_4^{\perp}\beta^{\perp}\varepsilon_1^{\perp*}\varepsilon_3^{\perp},
\end{aligned} \tag{3.29}$$

gdzie

$$\alpha^{\perp} = x_1\kappa_{34}^{\perp} - x_3\kappa_{12}^{\perp}, \tag{3.30}$$

$$\beta^{\perp} = x_2\kappa_{34}^{\perp} - x_4\kappa_{12}^{\perp}. \tag{3.31}$$

Dokładna postać  $\tilde{\mathcal{F}}_2$  i  $ff$  jest zależna od wyboru czynnika  $f_{\lambda}$ . Dla  $f_{\lambda} = \exp[-(\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b)^2/\lambda^2]$  mamy<sup>1</sup>,

$$\tilde{\mathcal{F}}_2 = x_2x_3 \frac{1 + x_1 - x_3}{x_2\alpha^{\perp 2} + x_3\beta^{\perp 2}}, \tag{3.32}$$

$$ff = \exp\left[-\frac{x_2\alpha^{\perp 2} + x_3\beta^{\perp 2}}{x_2x_3(x_1 - x_3)\lambda^2}\right]. \tag{3.33}$$

Oznaczenie  $ff$  bierze się stąd, że czynnik ten jest iloczynem dwóch czynników  $f_{\lambda}$ , z obu wierzchołków oddziaływania  $V_{\lambda\epsilon}$ .

### 3.4 Równanie własne

Równanie własne dla  $H_{\lambda\epsilon}$ , z wartością własną  $M$ , ma postać

$$(P^+H_{\lambda\epsilon} - P^{\perp 2})|P\rangle = M^2|P\rangle. \tag{3.34}$$

Stan  $|P\rangle$  jest stanem własnym  $H_{\lambda\epsilon}$  i jest jednocześnie stanem własnym operatorów  $P_{\lambda}^+$  i  $P_{\lambda}^{\perp}$ .

Oddziaływania w  $H_{\lambda\epsilon}$  mogą zmieniać liczbę cząstek i dlatego stan własny  $|P\rangle$  może mieć człony z dowolną liczbą gluonów efektywnych. Stany o ustalonej liczbie gluonów efektywnych będziemy nazywać sektorami przestrzeni Fock'a. Rozłożymy  $|P\rangle$  na składowe w bazie gluonów efektywnych:

$$|P\rangle = |g_{\lambda}g_{\lambda}\rangle + |g_{\lambda}g_{\lambda}g_{\lambda}\rangle + \dots. \tag{3.35}$$

<sup>1</sup>Wszystkie wzory w tej pracy, zależne od postaci czynnika kształtu,  $f_{\lambda}$ , są podane dla tego wyboru.

Zakładamy, że stan dwugluonowy dominuje w rozkładzie  $|P\rangle$  na sektory przestrzeni Fock'a, a tym samym że wkład pozostałych sektorów do normy stanu  $|P\rangle$  jest mały. Zrobienie założenia, że gluonium składa się z dwóch gluonów jest uzasadnione również i z tego powodu, że pozwala budować stany o liczbach kwantowych jakie mają kandydaci doświadczalni na gluonium, jak np.  $f(1500)$  [24, 25] czy  $f(1710)$  [26, 27]. Ponieważ  $H_{\lambda\epsilon}$  jest drugiego rzędu w  $g$  to mamy możliwość, dzięki obecności członów  $Y_{\lambda\epsilon}$  i  $Y_{\lambda\epsilon}^\dagger$  w hamiltonianie efektywnym  $H_{\lambda\epsilon}$ , uwzględnienia w równaniu własnym wkładów pochodzących od sektora jedno i trójcząstkowego. Ponieważ chcemy opisywać fizyczne stany, a te nie mogą nieść koloru netto, więc stan jednocząstkowy nie daje wkładu.

Zastanówmy się, co stoi na przeszkodzie by uwzględnić tylko sam sektor dwucząstkowy, bez uwzględniania trójcząstkowego. W takim przypadku równanie (3.34) przyjmuje postać:

$$[T_\lambda + f_\lambda(V_{\lambda\epsilon} + Z_{\lambda\epsilon})]|g_\lambda g_\lambda\rangle = E|g_\lambda g_\lambda\rangle. \quad (3.36)$$

Jak widać, w równaniu tym zostały całkowicie pominięte oddziaływania zmieniające liczbę cząstek reprezentowane w  $H_{\lambda\epsilon}$ . Niestety, równanie to w przypadku procedury RGPEP jest rozbieżne gdy  $\epsilon \rightarrow 0$ . Jest to odmienna sytuacja niż w przypadku pracy [28].

Silną zależność od  $x$  posiada człon  $Y_{\lambda\epsilon}$ , w  $H_{\lambda\epsilon}$ . Istnieje zatem szansa, że uwzględnienie tego członu pozwoli wyeliminować rozbieżności, gdy  $\epsilon \rightarrow 0$ .  $Y_{\lambda\epsilon}$  zmienia liczbę cząstek o jeden, w związku z czym, oprócz sektora z dwoma gluonami musimy włączyć do naszej analizy również sektor z trzema gluonami.

Z (3.34) wynika, następujący układ równań

$$\begin{cases} [T_\lambda + f_\lambda(V_{\lambda\epsilon} + Z_{\lambda\epsilon})]|g_\lambda g_\lambda g_\lambda\rangle + Y_{\lambda\epsilon}|g_\lambda g_\lambda\rangle = E|g_\lambda g_\lambda g_\lambda\rangle, \\ Y_{\lambda\epsilon}|g_\lambda g_\lambda g_\lambda\rangle + [T_\lambda + f_\lambda(V_{\lambda\epsilon} + Z_{\lambda\epsilon})]|g_\lambda g_\lambda\rangle = E|g_\lambda g_\lambda\rangle \end{cases}. \quad (3.37)$$

Naszym celem jest wyrugowanie sektora trójcząstkowego z tego układu i otrzymanie zredukowanego hamiltonianu działającego już tylko w podprzestrzeni dwóch gluonów. Perturbacyjna eliminacja sektora trójgluonowego uwalnia nas co prawda od rozbieżności małych  $x$ , ale równanie tak otrzymane nie prowadzi do rozwiązań w postaci stanów związanych.<sup>2</sup> Dzieje się tak, gdyż w przypadku perturbacyjnej eliminacji sektora trójgluonowego generuje się identyczny człon do  $T_{\lambda\epsilon}^{\delta m^2}$ , ale z przeciwnym znakiem, przez co gluony nie mają żadnej masy efektywnej. Aby temu zaradzić, wprowadzamy

<sup>2</sup>Równanie takie analizowano numerycznie, jednak w wynikach obliczeń numerycznych, nie dopatrzone się rozwiązań w postaci stanów związanych (otrzymywano jedynie wyniki z ujemną wartością własną operatora  $P^+ H_{gg}^{pert} - P^{-2}$ , których nie można zaakceptować jako fizycznych rozwiązań).

ansatz na masę gluonów w pośrednim stanie trójcząstkowym. Ansatz ten nie dopuści do całkowitego kasowania się członów masowych. Ponadto, człon tego typu pozwoli na uwzględnienie, w przybliżeniu, zaniedbanych oddziaływań w sektorze trójcząstkowym.

### 3.4.1 Ansatz

W oddziaływaniach dwucząstkowych oraz w samooddziaływaniu gluonów winna być zawarta większość informacji o dynamice prowadzącej do powstania stanów związanych cząstek efektywnych. Wybierając stan dwugluonowy za dominujący w stanie związanym, musimy zapewnić, aby przejście do stanu trójgluonowego było mało opłacalne energetycznie. Można to zrealizować poprzez zwiększenie masy inwariantnej w sektorze z trzema gluonami, zakładając, że oddziaływania z innymi gluonami zwiększają ich energię.

Ansatz, którego używamy, ma za zadanie modelować oddziaływanie w sektorze trójgluonowym i oddziaływanie sektora trójgluonowego z sektorami z większą liczbą gluonów [16]. Pominięte efekty tych oddziaływań nie są znane, ale wiadomo, że te oddziaływania istnieją. Powstaje pytanie czy i jak można dobrać ten ansatz, żeby zbliżyć się do pełnego rozwiązania. Jedyny warunek jaki mamy do dyspozycji jest ten, że prawdziwa dynamika usunie rozbieżności małych  $x$  w sektorze dwugluonowym i że energia stanu trójgluonowego jest większa niż dla gluonów, które nie oddziałują, bo w przeciwnym razie przybliżenie gluonium przez dwa gluony efektywne nie miałoby uzasadnienia. Najprostszym sposobem spełnienia obu tych warunków jest wprowadzenie do hamiltonianu w sektorze trójgluonowym członu typu masowego,  $T^{\mu^2}$ .

$$T^{\mu^2} = \frac{1}{3!} \sum_{123} \int [123] \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i^2(123)}{p_i^+} |123\rangle \langle 123|, \quad (3.38)$$

gdzie  $\mu_i^2(123)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , są odpowiednimi funkcjami zależnymi od pędów względnych trzech gluonów. Od tej nieznannej funkcji żądamy:

1. by usunęła z równania własnego w sektorze dwugluonowym (po eliminacji sektora trójgluonowego) rozbieżności małych  $x$  przy  $\epsilon \rightarrow 0$ ,
2. żeby wносиła dodatkowy (i być może znaczny) wkład do energii stanu trójgluonowego.

Ponieważ oddziaływanie pomiędzy stanem dwu i trójcząstkowym odbywa się poprzez rozbieżne w obszarze małych  $x$  oddziaływanie  $Y_{\lambda\epsilon}$ , masa gluonu  $\mu^2(123)$  modelująca pominięte oddziaływania, nie może być stałą, lecz musi

być funkcją pędów względnych gluonów i to taką, by w sektorze dwugluonowym otrzymać skończone równanie w granicy  $\epsilon \rightarrow 0$ . W szczególności,  $\mu^2(123)$  musi mieć odpowiednie zachowanie w obszarze małych  $x$ . Szczegółowa postać  $\mu^2(123)$  zostanie podana w części 3.4.3.

Wprowadzenie ansatzu na masę w sektorze trójciałowym i zaniedbanie sektorów z liczbą gluonów większą niż 3 wydaje się krokiem czysto arbitralnym, choć podyktowanym znajomością spektrum hadronów w tablicach cząstek, w których wzbudzenia gluonowe wydają się być duże w porównaniu z masami lekkich kwarków.

Z teoretycznego punktu widzenia wprowadzenie ansatzu w sektorze trójciałowym i pominięcie sektorów z większą liczbą gluonów nie jest zupełnie arbitralne, bowiem ansatz musi spełniać silny warunek, że dynamika gluonów w sektorze dwu i trójgluonowym jest skończona dla małych  $x$ .

Przyszła analiza równań wyższych rzędów i uwzględnienie większej liczby sektorów przestrzeni Focka cząstek efektywnych pokaże, na ile nasz ansatz reprezentuje prawdziwą dynamikę. Z drugiej strony, nasz ansatz jest wprowadzony w taki specjalny sposób, że im wyższego rzędu użyje się do obliczenia  $H_{\lambda\epsilon}$  i im więcej sektorów uwzględni się w równaniu własnym, z tym większą precyzją nasz ansatz można dopasować do prawdziwej dynamiki. Mechanizm ten został wyjaśniony we wstępie, mianowicie dla relatywistycznych wartości stałej sprzężenia  $g$  wkład od ansatzu znika i jest w pełni zastąpiony prawdziwymi oddziaływaniami. Natomiast w rozwinięciu dla małej stałej sprzężenia, człony formalnie niższych rzędów odgrywają większą rolę niż człony wyższych rzędów. W tej pracy rozważamy jedynie pierwszy krok tej procedury ograniczający się do sektora  $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ , robimy ansatz na masę w najniższym rzędzie i nie analizujemy wyrazów wyższych rzędów, choć a priori droga do rachunków wyższych rzędów jest otwarta.

Wprowadzenie ansatzu na masę gluonów w sektorze trójcząstkowym jest próbą zgadnięcia pierwszego przybliżenia numerycznego do rozwiązania QCDg dla gluonium w sektorze dwugluonowym. Nie mamy gwarancji, że nasz ansatz zbliża nas do takiego rozwiązania. Jednak poprzez analizę wyższych sektorów przestrzeni Focka można będzie w przyszłości poprawiać ansatz rząd po rzędzie i zastępować wyrazy zgadnięte w niższym rzędzie przez wyprowadzone oddziaływania w procedurze RGPEP w wyższych rzędach. Niniejsza praca, która przeprowadza rachunek pierwszego początkowego przybliżenia w sekwencji takich przybliżeń, ma na celu ustalenie od czego można zacząć, o ile w ogóle taki początek może prowadzić do rozsądnych wyników. Okazuje się, że tak jest i następane rozdziały pokazują, co udało się osiągnąć za pomocą naszego ansatzu.



### 3.4.2 Eliminacja sektora trójgluonowego

Układ równań (3.37) z oddziaływaniami w sektorze trójgluonowym zastąpionymi przez ansatz na masę gluonów  $\mu^2$ (123), przyjmuje postać:

$$\begin{cases} (T_\lambda + T^{\mu^2})|g_\lambda g_\lambda g_\lambda\rangle + Y_{\lambda\epsilon}|g_\lambda g_\lambda\rangle &= E|g_\lambda g_\lambda g_\lambda\rangle, \\ Y_{\lambda\epsilon}|g_\lambda g_\lambda g_\lambda\rangle + [T_\lambda + f_\lambda(V_{\lambda\epsilon} + Z_{\lambda\epsilon})]|g_\lambda g_\lambda\rangle &= E|g_\lambda g_\lambda\rangle. \end{cases} \quad (3.39)$$

Dokładna postać ansatzu na  $\mu^2$  będzie omówiona dopiero na etapie analizy równania własnego zredukowanego do dwóch cząstek efektywnych w części 3.4.3.

Hamiltonian efektywny w sektorze dwucząstkowym,  $H_{gg}$ , obliczamy w rachunku zaburzeń w  $g$  posługując się operatorem  $\mathcal{R}$ , który wyraża sektor trójcząstkowy przez sektor dwucząstkowy,

$$|g_\lambda g_\lambda g_\lambda\rangle = \mathcal{R}|g_\lambda g_\lambda\rangle. \quad (3.40)$$

Posługując się znanymi wzorami na  $\mathcal{R}$  (szczegóły transformacji danej przez  $\mathcal{R}$  można znaleźć w pracy [29]) i operatorem rzutowym  $\mathcal{P}$  na stan  $|g_\lambda g_\lambda\rangle$  otrzymamy hamiltonian  $H_{gg}$ , który działa tylko w przestrzeni dwucząstkowej. Równanie własne dla gluonium przybiera postać,

$$H_{gg}|g_\lambda g_\lambda\rangle = E|g_\lambda g_\lambda\rangle, \quad (3.41)$$

gdzie wartość własna  $E$  wyraża się przez tę samą masę  $M$  i te same pędy  $P^{+, \perp}$  co w (3.34), tzn.  $E = (P^{\perp 2} + M^2)/P^+$ .  $H_{gg}$  wyraża się następującym wzorem:

$$H_{gg} = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P} + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{R}}} (\mathcal{P} + \mathcal{R}^\dagger) H_\lambda (\mathcal{P} + \mathcal{R}) \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P} + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{R}}}. \quad (3.42)$$

Rozwijając (3.42) w  $g$  do 2 rzędu, dostajemy wyrażenie na elementy macierzy  $H_{gg}$  postaci,

$$\begin{aligned} \langle k|H_{gg}|k'\rangle &= \langle k|T_\lambda + T_{\lambda\epsilon}^{\delta m^2} + f_\lambda(W_{\lambda\epsilon} + Z_{\lambda\epsilon} + V_{\lambda\epsilon}) \\ &+ \frac{1}{2}Y_{\lambda\epsilon} \left( \frac{1}{E_k - T_\lambda - T^{\mu^2}} + \frac{1}{E_{k'} - T_\lambda - T^{\mu^2}} \right) Y_{\lambda\epsilon}|k'\rangle, \end{aligned} \quad (3.43)$$

gdzie  $|k\rangle$  i  $E_k$  to stany i wartości własne energii swobodnej  $T_\lambda$ ,

$$T_\lambda|k\rangle = E_k|k\rangle. \quad (3.44)$$

Zgodnie z (3.43),  $H_{gg}$  przyjmuje postać

$$H_{gg} = T_{gg} + T_{gg}^{\delta m^2} + T_{Rgg}^{\mu^2} + f_\lambda(W_{gg} + Z_{gg} + V_{gg}) + V_{Rgg}, \quad (3.45)$$

gdzie  $T_{gg}$ ,  $T_{gg}^{\delta m^2}$ ,  $W_{gg}$ ,  $Z_{gg}$ ,  $V_{gg}$  są równe, odpowiednio  $T_\lambda$ ,  $T_{\lambda\epsilon}^{\delta m^2}$ ,  $W_{\lambda\epsilon}$ ,  $Z_{\lambda\epsilon}$ ,  $V_{\lambda\epsilon}$  po obciążeniu do podprzestrzeni dwugluonowej. Wkład od wyeliminowanego sektora trójgluonowego jest reprezentowany przez dwa wyrazy w (3.45), wyraz  $T_{Rgg}^{\mu^2}$  oznacza poprawkę do masy gluonu, a wyraz  $V_{Rgg}$  opisuje oddziaływanie dwu gluonów efektywnych przez wymianę jednego gluonu efektywnego. Ansatz na masy gluonów w stanie trójcząstkowym modeluje efekty oddziaływań w sektorze dwucząstkowym.

Oba te operatory i tylko one są czułe na ansatz o masie gluonu w stanie trójcząstkowym. Szczegółowa postać  $T_{Rgg}^{\mu^2}$  i  $V_{Rgg}$  jest następująca:

$$V_R = g^2 \sum_{1234} \int [1234] \tilde{\delta} V_R(12, 34) |12\rangle \langle 34|, \quad (3.46)$$

$$V_R(12, 34) = f^{ac_1c_2} f^{ac_3c_4} v_R^s(12, 34) + 4 f^{ac_1c_3} f^{ac_2c_4} v_R(12, 34), \quad (3.47)$$

$$v_R(12, 34) = \theta(x_1 - x_3) f f \tilde{\mathcal{K}}_2(v_{div} + v_{fin}), \quad (3.48)$$

$$\mathcal{K}_2 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{x_1 x_3}{\alpha^{\perp 2} + x_1 x_3 (x_1 - x_3) \nu_{3,5,2}^2} + \frac{x_2 x_4}{\beta^{\perp 2} + x_2 x_4 (x_1 - x_3) \nu_{3,5,2}^2} \right], \quad (3.49)$$

$$\nu_{3,5,2}^2 = \frac{\mu_2^2(3, 5, 2)}{x_2} + \frac{\mu_3^2(3, 5, 2)}{x_3} + \frac{\mu_5^2(3, 5, 2)}{x_5}. \quad (3.50)$$

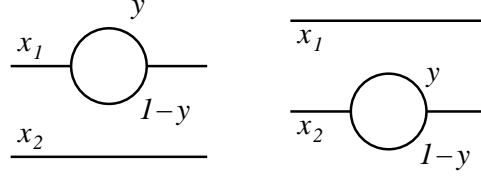
Indeksy pędów są wprowadzone według konwencji podanej na rys. 3.2.

$$T_{Rgg}^{\mu^2} = \frac{g^2}{2!} \sum_{12} \int [12] T_{Rgg}^{\mu^2}(12) |12\rangle \langle 12|, \quad (3.51)$$

$$T_{Rgg}^{\mu^2}(12) = -N_c \int [y\kappa] e^{-\frac{2\mathcal{M}^2}{\lambda^2}} r_\epsilon^2(y, 1-y) \left[ \frac{1-y}{y} + \frac{y}{1-y} + y(1-y) \right] \\ \times \left[ \frac{1}{x_1} \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2 + x_1 \nu_{x_2, x_1 y, x_1(1-y)}^2} + \frac{1}{x_2} \frac{\mathcal{M}^2}{\mathcal{M}^2 + x_2 \nu_{x_1, x_2 y, x_2(1-y)}^2} \right], \quad (3.52)$$

gdzie  $N_c = 3$  dla grupy  $SU(3)$ .

Na razie masy  $\mu_i^2$ , dla  $i = 1, 2, 3$  (które dla uproszczenia będziemy dalej oznaczać nie pisząc indeksów), we wzorach na  $\nu^2$ , są nieznanymi funkcjami pędów cząstek obecnych w pośrednim stanie trójgluonowym. Szczegółowa postać mas  $\mu^2$  jest dobrana na podstawie dwu kryteriów. Po pierwsze, pokażemy, że uzyskanie skończonego równania własnego (3.41) gdy  $\epsilon \rightarrow 0$ , jest możliwe dla pewnych wyborów zależności  $\mu^2$  od pędów. Po drugie przyjmujemy jak najprostszą postać  $\mu^2$ . Można przypuszczać, że wiele różnych



Rysunek 3.3: Ilustracja do konfiguracji pędów w  $T_{Rgg}^{\mu^2}$ . Pierwszy rysunek odpowiada pierwszemu składnikowi w nawiasie kwadratowym, podobnie drugi.

akceptowalnych wyborów  $\mu^2$ , prowadzi do podobnych wyników. Istotne wydaje się być średnie zachowanie  $\mu^2$ , a nie specyficzna postać funkcyjna. Częściowo potwierdzają to wyniki numeryczne. Dopóki więc nie dysponujemy innymi przesłankami teoretycznymi lub doświadczalnymi, to ograniczenie się do najprostszej możliwej postaci  $\mu^2$  jest uzasadnione.

### 3.4.3 Rozbieżności małych $x$

Składniki w operatorze  $H_{gg}$  można podzielić na takie, które są skończone gdy  $\epsilon \rightarrow 0$ , oraz takie, które są rozbieżne w tej granicy. Pokażemy, że, odpowiednio dobierając  $\mu^2$ , można usunąć rozbieżności małych  $x$  w  $H_{gg}$ . Pogrupujemy składniki  $H_{gg}$  następująco:

$$H_{gg} = H_{gg}^{fin} + H_{gg}^{div}, \quad (3.53)$$

$$H_{gg}^{fin} = T_{gg} + f_{\lambda}(W_{gg} + V_{gg}^{fin}) + V_{Rgg}^{fin}, \quad (3.54)$$

$$H_{gg}^{div} = T_{gg}^{\delta m^2} + T_{Rgg}^{\mu^2} + f_{\lambda}(Z_{gg} + V_{gg}^{div}) + V_{Rgg}^{div}, \quad (3.55)$$

przy czym  $V_{gg}^{fin}$  i  $V_{Rgg}^{fin}$  to te części  $V_{gg}$  i  $V_{Rgg}$ , które zawierają  $v_{fin}$  z równania (3.48), a  $V_{gg}^{div}$  i  $V_{Rgg}^{div}$  to te które zawierają  $v_{div}$ .

$H_{gg}^{fin}$  jest skończone gdy  $\epsilon \rightarrow 0$  i możemy opuścić regularyzację małych  $x$  w  $H_{gg}^{fin}$ . Niemniej,  $H_{gg}^{fin}$  jest zależne od  $\mu^2$ .

Przyjmujemy oznaczenia

$$H_{mass} = T_{gg}^{\delta m^2} + T_{Rgg}^{\mu^2}, \quad (3.56)$$

$$H_{low} = ffZ_{gg} + V_{Rgg}^{div}, \quad (3.57)$$

$$H_{high} = f_{\lambda}[V_{gg}^{div} - (ff - 1)Z_{gg}], \quad (3.58)$$

$$H_{high}^{rest} = (f_{\lambda} - 1)ffZ_{gg}. \quad (3.59)$$

Wówczas

$$H_{gg}^{div} = H_{mass} + H_{low} + H_{high} + H_{high}^{rest}. \quad (3.60)$$

### Część wysokoenergetyczna

Zauważmy, że operatory  $H_{high}$  oraz  $H_{high}^{rest}$  nie zależą od ansatzu na  $\mu^2$ . Części te pochodzą bezpośrednio z transformacji podobieństwa, która rozwiązuje problem rozbieżności ultrafioletowych w teorii. Stąd nazwa  $H_{high}$ . W  $H_{high}$  w obu wyrazach występuje czynnik  $(1 - ff)$ , który zabezpiecza, że w wyrażeniach wyprodukowanych przez procedurę renormalizacji podczas obliczania efektywnego oddziaływania w rachunku zaburzeń nie pojawiają się małe mianowniki energetyczne. Punktem startowym dla procedury renormalizacji jest lokalna teoria pola, sprzęgająca ze sobą stany o dowolnie dużych energiach. Transformacja podobieństwa pozwoliła nam otrzymać hamiltonian efektywny  $H_{\lambda\epsilon}$ , sprzęgający ze sobą już tylko stany różniące się energiami nie większymi niż rzędu  $\lambda$ . Hamiltonian  $H_{\lambda\epsilon}$  był punktem wyjścia do redukcji teorii o nieskończonej liczbie stopni swobody (cała przestrzeń Focka cząstek efektywnych) do zredukowanego operatora działającego w przestrzeni dwucząstkowej. Operator  $H_{high}$  wnosi do dynamiki w przestrzeni dwucząstkowej wkłady pochodzące od stanów o dużych energiach, które zostały uwzględnione przez RGPEP podczas wyliczania hamiltonianu  $H_{\lambda\epsilon}$ .

Dowód skończoności  $H_{high}$  dla  $\epsilon \rightarrow 0$  przebiega następująco. Oznaczmy różnicę pędów podłużnych gluonów 1 i 3 (rys. 3.2) przez  $z = x_1 - x_3$ . W jądrze całkowym operatora  $H_{high}$ , które oznaczamy przez  $h_{high}$  występują człony z  $z > 0$  jak i  $z < 0$ :

$$h_{high} = \frac{1}{2} f_\lambda (ff - 1) \frac{1}{z^2} [\theta(z) v_{high}^+ + \theta(-z) v_{high}^-], \quad (3.61)$$

$$v_{high}^+ = 4\tilde{\mathcal{F}}_2 \alpha^\perp \beta^\perp - (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), \quad (3.62)$$

$$v_{high}^- = v_{high}^+ (1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4). \quad (3.63)$$

Gdyby we wzorze (3.61) występowały wyrazy stałe lub liniowe w  $z$  to  $h_{high}$  byłby rozbieżny gdy  $\epsilon \rightarrow 0$ . Jednak (wynik ten otrzymuje się w przypadku  $f_\lambda = \exp[-(\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b)^2/\lambda^2]$  w  $\tilde{\mathcal{F}}_2$ )

$$\lim_{z \rightarrow 0} v_{high}^+ = \lim_{z \rightarrow 0} v_{high}^- = -2(1 - 2x_1) \frac{\kappa_{12}^{\perp 2} - \kappa_{34}^{\perp 2}}{(\kappa_{12}^{\perp} - \kappa_{34}^{\perp})^2} z + o(z^2). \quad (3.64)$$

Mimo, że dla każdej części z osobna, zarówno dla  $z > 0$  jak i  $z < 0$ , oddziaływanie jest rozbieżne gdy  $z \rightarrow 0$ , to gdy uwzględnimy sumę obu części, to rozbieżność znika w sensie wartości głównej. Gwarantuje to skończoność oddziaływania i pozwala na usunięcie regularyzacji małych  $x$ . Dowód skończoności członu  $H_{high}^{rest}$  jest podany w dodatku B.2.5.

### Część niskoenergetyczna

Pokażemy teraz, że odpowiedni dobór  $\mu^2$  pozwala zlikwidować rozbieżności małych  $x$  w  $H_{low}$  i  $H_{mass}$ . Weryfikację adekwatności naszego ansatzu na  $\mu^2$  przeprowadzimy numerycznie przez porównanie naszych wyników z wynikami na sieci. Jądro całkowe operatora  $H_{low}$  ma postać

$$h_{low}(12, 34) = \theta(z) f f \frac{1}{z^2} v_{low}, \quad (3.65)$$

$$v_{low} = 4\tilde{\mathcal{K}}_2^e \alpha^\perp \beta^\perp + (x_1 + x_3)(x_2 + x_4). \quad (3.66)$$

W granicy  $z \rightarrow 0$  mamy:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f f v_{low} = 4e^{-\frac{(\kappa_{12}^\perp - \kappa_{34}^\perp)^2}{z}} \frac{x_1 x_2 \nu_{x_1, z, x_2}^2}{(\kappa_{12}^\perp - \kappa_{34}^\perp)^2} z. \quad (3.67)$$

Oznacza to, że  $\nu^2$  musi zachowywać się jak  $z^\delta$ , gdzie  $\delta > 0$ , aby zlikwidować rozbieżność gdy  $z \rightarrow 0$ . Ponieważ  $\mu^2$  dla bozonów wchodzi do wzoru (3.50) w sposób symetryczny, to nasz ansatz musi zależeć od pędów wszystkich cząstek obecnych w pośrednim stanie 3-gluonowym, w przeciwnym bowiem wypadku nie byłoby możliwe wyciągnięcie wspólnego czynnika  $z^\delta$  w wyrażeniu na  $\nu^2$ . Najprostszą postacią  $\mu^2$ , spełniającą powyższe wymogi, jest

$$\mu_i^2 = b^2 x_i (x_i x_j x_k)^\delta, \quad (3.68)$$

gdzie  $b$  jest parametrem o wymiarze pędu, a  $\delta > 0$ . Ten wybór prowadzi do następującej postaci na  $\nu^2$ :

$$\nu^2(2, 3, 5) = 3b^2 (x_2 x_3 x_5)^\delta. \quad (3.69)$$

Sytuacja w gluonium jest odmienna niż w przypadku ciężkich kwarkonów. W pracy [16] jest pokazane, że w przypadku  $Q\bar{Q}$  dla istnienia skończonego potencjału oddziaływania wystarcza by  $\mu^2$  gluonu efektywnego w sektorze  $|Q\bar{Q}g\rangle$  zależało jedynie od pędu względnego gluonu i pary  $Q\bar{Q}$ . Jednak w naszym przypadku konieczne jest rozszerzenie tej zależności na pędy wszystkich gluonów, a nie tylko pęd wymienianego gluonu. Wynika to stąd, że przybliżamy skomplikowane oddziaływania między cząstkami w sektorze trójciałowym oraz sprzężenia z pozostałymi sektorami przestrzeni Focka przez człon typu masowego  $T^{\mu^2}$ , które poprawia energię wszystkich gluonów obecnych w tym sektorze niezależnie, czy są one tylko wymieniane, czy też obecne w stanie końcowym. Dlatego też w przypadku gluonium mamy wkład od trzech gluonów i potrzebujemy  $\mu^2$  w postaci (3.68). Dla układu  $Q\bar{Q}$  gdzie jest tylko jeden pośredniczący gluon wystarcza prostsza formuła.

Wyniki obliczeń numerycznych pokazują, że taka postać  $\mu^2$  podana we wzorze (3.68) nie tylko eliminuje rozbieżności w  $H_{gg}$ , ale również pozwala na powstanie stanów związanych dwóch gluonów dla całego zakresu wartości wartości  $b$  i  $\delta$ .

### Człon masowy

Drugim miejscem poza,  $H_{low}$  opisującym wymianę gluonu efektywnego, gdzie założony ansatz na  $\mu^2$  odgrywa rolę w eliminowaniu rozbieżności małych  $x$  jest człon  $H_{mass}$ . O tym czy i jak powstaje stan związany gluonów decyduje kombinacja samooddziaływania gluonów opisywana przez  $H_{mass}$  i potencjału wymiany gluonu opisywanego przez  $H_{low}$ . Rolę masy w członie samooddziaływania  $H_{mass}$  pełni

$$h_{mass} = N_c \int [y\rho] e^{-\frac{2\mathcal{M}^2}{\lambda^2}} r_\epsilon^2(y, 1-y) \left[ \frac{1-y}{y} + \frac{y}{1-y} + y(1-y) \right] \times \left[ \frac{\nu_{x_2, x_1 y, x_1(1-y)}^2}{\mathcal{M}^2 + x_1 \nu_{x_2, x_1 y, x_1(1-y)}^2} + \frac{\nu_{x_1, x_2 y, x_2(1-y)}^2}{\mathcal{M}^2 + x_2 \nu_{x_1, x_2 y, x_2(1-y)}^2} \right], \quad (3.70)$$

gdzie  $\mathcal{M}^2 = \rho^{\perp 2}/[y(1-y)]$ , a funkcje  $\nu^2$  dane są przez (3.69).

Wynik ten jest konsekwencją przyjęcia  $\lambda_0 = 0$  we wzorze (3.24). Taki wybór oznacza, że część skończoną kontrczłonu masowego kładziemy równą zeru i jest podyktowany żądaniem, aby  $H_{mass}$  nie zawierał rozbieżności małych  $x$ . Jedynie taki wybór części skończonej kontrczłonu pozwala nam na zlikwidowanie rozbieżności poprzez zaproponowaną przez nas postać  $\mu^2$ . Z drugiej strony, ten sam wybór oznacza, że masa jednego gluonu, jako masa stanu własnego hamiltonianu  $H_{\lambda\epsilon}$ , jest nieskończona w granicy  $\epsilon \rightarrow 0$ . Nie jest to dowód, że nasz opis wyjaśnia uwięzienie gluonów, ale można przewidzieć, że nasz opis jest zgodny z zasadą, że gluony nie mogą istnieć jako cząstki swobodne. Zwróćmy uwagę, że ten efekt, jakim jest możliwość usunięcia rozbieżności małych  $x$  w członach masowych, osiąga się za pomocą jednej i tej samej postaci  $\mu^2$  dla gluonów efektywnych w sektorze trójcząstkowym, takiej samej w wymianie jak i członach masowych. Zarówno  $\nu_{x_2, x_1 y, x_1(1-y)}^2$  jak i  $\nu_{x_1, x_2 y, x_2(1-y)}^2$  są proporcjonalne do  $[y(1-y)]^\delta$ , co pozwala na otrzymanie skończonego oddziaływania w granicy  $\epsilon \rightarrow 0$  w gluonium. Dzięki temu możemy usunąć regularyzację  $r_\epsilon$  w równaniu stanu własnego, równanie (3.41).

# Rozdział 4

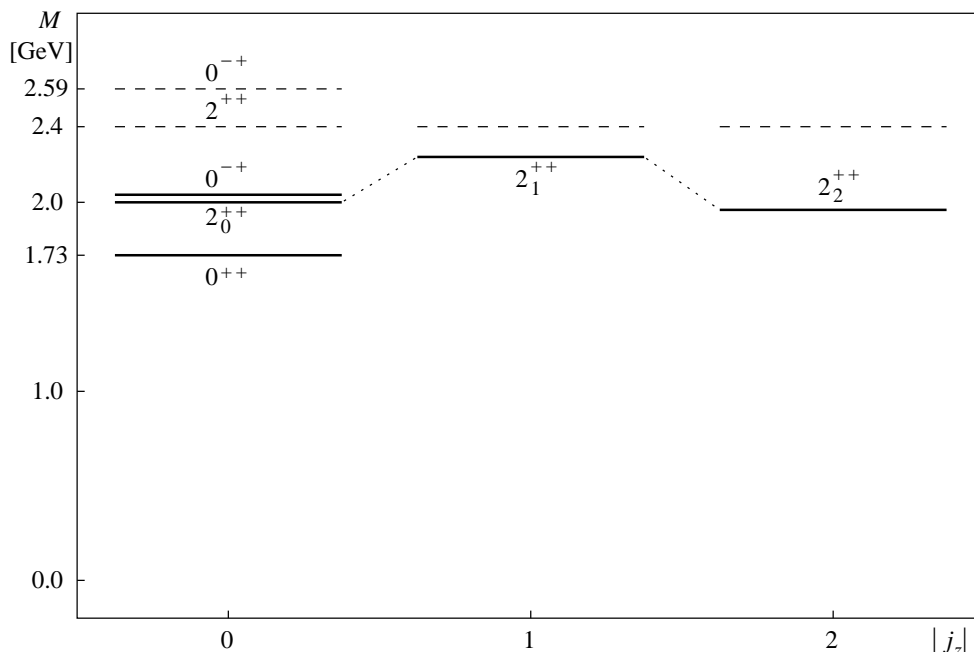
## Wyniki

Do zdiagonalizowania operatora  $H_{gg}$ , danego równaniem (3.41), użyto bazy zupełnej w sektorze dwóch gluonów efektywnych, przedstawionej w dodatku B.1. Do obliczeń numerycznych konieczne było wybranie skończonej liczby wektorów bazowych, dlatego też ograniczono się do  $n_{max}$  funkcji radialnych i  $l_{max}$  funkcji kątowych. Ponieważ  $[J_3, H_{gg}] = 0$ , więc do diagonalizacji wybrano bazę, będącą bazą stanów własnych  $J_3$ . Oznaczmy wartości własne operatora  $J_3$  przez  $j_z$ . Dla każdego  $j_z$  możemy przeprowadzać diagonalizację  $H_{gg}$  osobno. Przeprowadzono obliczenia dla przypadków z  $|j_z| = 0, 1, 2$ , aby móc porównać otrzymane wyniki z wynikami na sieci [30, 31], gdzie najbliższy jest stan  $0^{++}$  (1.73 GeV), a następnym w kolejności jest stan  $2^{++}$  (2.4 GeV). Typowy przykład wyniku diagonalizacji w rozpatrywanym zakresie parametrów przedstawia rys. 4.1.

$M(j_z = 0)$ [GeV]	$M( j_z  = 1)$ [GeV]	$M( j_z  = 2)$ [GeV]
1.73	2.25	1.97
2.01	2.63	2.54
2.06	2.64	2.6
2.41	2.66	2.67
2.41	2.85	2.83

Tabela 4.1: Wyniki dla przypadku  $\lambda = 1.92$  GeV,  $b = 2\lambda$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\alpha_s = 0.44$ ,  $n_{max} = 9$ ,  $l_{max} = 15$ . Wartości na masy stanów związanych dwóch gluonów efektywnych z  $|j_z| \leq 2$  można próbować identyfikować z rozwiązaniami sieciowymi na masy stanów  $0^{++}$ ,  $2^{++}$ ,  $0^{-+}$ ,  $0^{*++}$ ,  $2^{-+}$ . Jednak tylko najniższe stany z  $j_z \neq 0$  są dobrze oddzielone od wyższych stanów wzbudzonych i dlatego na rys. 4.1 zaznaczyliśmy tylko 3 najniższe stany dla  $j_z = 0$  oraz po jednym dla  $|j_z| = 1$  i  $|j_z| = 2$ .

Przypisywanie otrzymanych stanów do multipletów, odpowiadających ustalonymu momentowi pędu (spinowi) 0, 1 lub 2, kiedy te stany nie są ściśle



Rysunek 4.1: Przykład mas najlżejszych gluoniów. Parametry hamiltonianu zostały tak dobrane, aby wynik na  $0^{++}$  o masie 1.73 GeV pokrył się z wynikiem otrzymanym na sieci. Linie ciągłe oznaczają wyniki otrzymane przez diagonalizację hamiltonianu, a linie przerywane reprezentują wyniki z sieci. Różnice między tymi wynikami są omówione w tekście. Linie kropkowane łączą stany, które mogą należeć do multipletu  $2^{++}$ , na zasadzie porównywania mas z rozwiązaniami na sieci. Wartości mas stanów przedstawionych na rysunku, oraz masy kilku następnym stanów wzbudzonych, zawiera tabela 4.1.

zdegenerowane (z powodu przybliżeń w opisie dynamiki), wymaga dysponowania dynamicznym operatorem momentu pędu na froncie świetlnym. Nie znamy go w ogólności, i jest on na tyle skomplikowany w rzędzie  $g^2$  dla gluonów efektywnych z małym  $\lambda$ , że w ramach niniejszej pracy jedynym kryterium do uporządkowania stanów i porównania ich z multipletami z sieci jest sama masa. Zbadaliśmy wiele cech otrzymywanych stanów własnych, ich rozkład na radialne i kątowe funkcje falowe oraz wartości oczekiwane charakterystycznych wielkości, jednak otrzymane przez nas stany związane są silnie relatywistyczne i wszystkie nasze metody analizy, oparte na intuicjach nierelatywistycznych, okazały się nieskuteczne w rozstrzygnięciu o całkowitym momencie pędu stanów własnych  $H_{gg}$ . W tej sytuacji użyliśmy procedury zaczynającej się od przyrównywania najmniejszej masy otrzymanej z hamiltonianu do najmniejszej masy otrzymywanej na sieci (wynik 1.73 GeV na



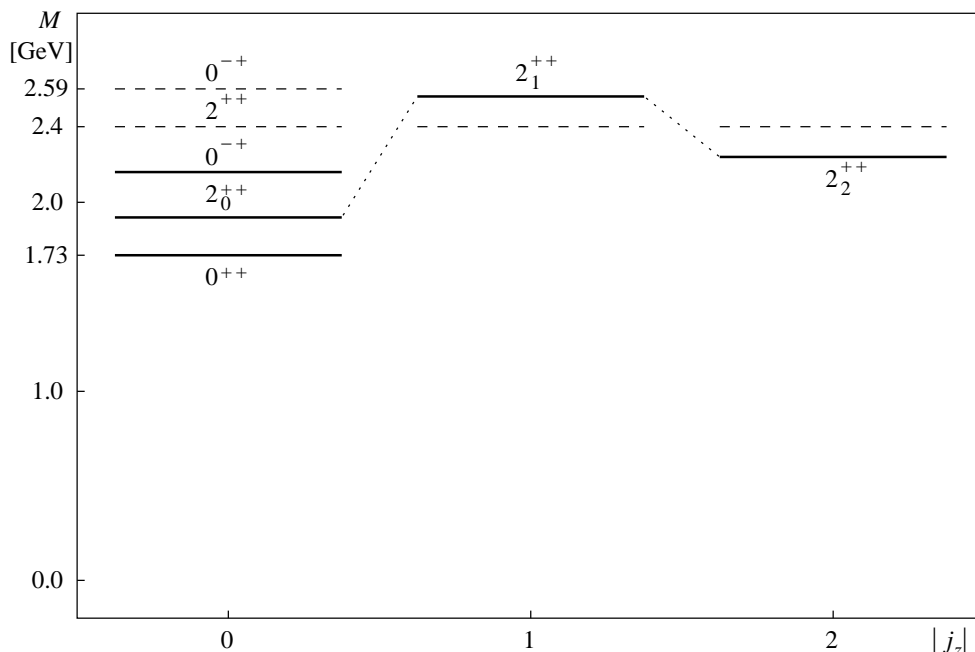
masę stanu  $0^{++}$  pochodzi z referencji [30]). Istnieje duży zakres rozsądnych parametrów w hamiltonianie dla których diagonalizacja prowadzi do podobnego wyniku. Wynik ten, z punktu widzenia całej konstrukcji teorii jest znaczący, bo obliczając hamiltonian efektywny dla QCDg w sektorze dwóch gluonów efektywnych,  $H_{gg}$ , nigdzie nie wprowadzaliśmy masy gluonów dołączając trzeci stan polaryzacji podłużnej dla masywnych cząstek o spinie 1, a powstawanie masy gluonium rzędu 2 GeV, pochodzi z silnych samooddziaływań gluonów zgodnie z regułami kwantowej teorii pola. Te samooddziaływania są kompensowane przez wymianę gluonu efektywnego tylko wtedy, gdy samooddziaływające gluony znajdują się blisko siebie.

Różnice mas powyżej stanu podstawowego nie są w idealnej zgodności z siecią. Stosunek mas stanów  $2^{++}$  i  $0^{++}$  na sieci wynosi 1.39 [30]. W przebadanych przez nas przypadkach, gdzie parametr ansatzu  $b$  zmieniał się od  $0.1\lambda$  do  $7.5\lambda$ , a  $\delta$  w zakresie od 0.07 do 0.6, nie znaleziono takiej wartości stosunku mas pierwszego stanu wzbudzonego do masy stanu podstawowego, dla  $j_z = 0$ , przy żądaniu, aby masa najbliższego gluonium była równa masie stanu  $0^{++}$ , z rachunków na sieci. Uzyskana przez nas wartość tego stosunku nigdy nie przekraczała 1.2. Na podstawie otrzymanych wyników można śmiało powiedzieć, że kluczową trudnością w hamiltonowskim opisie gluonium na froncie świetnym jest podanie dobrego operatora momentu pędu dla gluonów efektywnych i poprawienie ansatzu na  $\mu^2$  przez uwzględnienie  $H_{\lambda\epsilon}$  do rzędu  $g^4$ . Niemniej, otrzymane przez nas wyniki są jakościowo podobne do wyników z sieci i wykazują wiele dobrych cech teorii efektywnej, które omówimy później.

Gdybyśmy zrezygnowali z kryterium wyboru rozwiązań na podstawie porównywania z siecią stosunku masy pierwszego stanu wzbudzonego, do masy stanu podstawowego, wówczas można znaleźć przykłady rozwiązań, gdzie średnie (tzn. uśrednione po  $j_z$ ) położenie pierwszego stanu wzbudzonego, lepiej odpowiada masie stanu  $2^{++}$  z rachunków na sieci, co ilustruje przykład podany w tabeli 4.2.

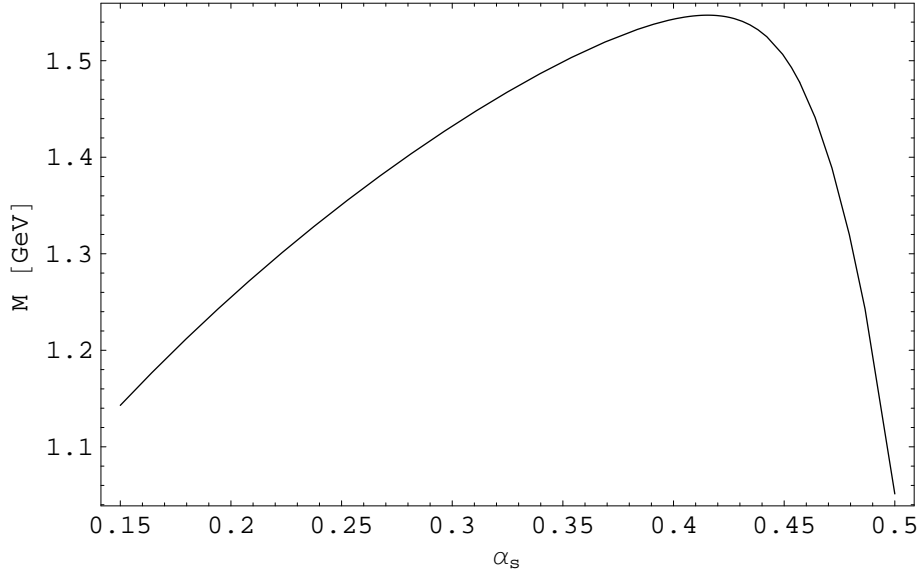
$M(j_z = 0)$ [GeV]	$M( j_z  = 1)$ [GeV]	$M( j_z  = 2)$ [GeV]
1.73	2.56	2.27
1.92	3.01	2.9
2.19	3.03	2.97
2.71	3.05	3.07
2.75	3.27	3.25

Tabela 4.2: 5 najmniejszych wartości mas dla  $|j_z| \leq 2$  dla przypadku  $\lambda = 2.14$  GeV,  $b = 2\lambda$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\alpha_s = 0.47$ ,  $n_{max} = 9$ ,  $l_{max} = 15$ . Rysunek 4.2 pokazuje położenie kilku najniższych z tych stanów w porównaniu z siecią. W porównaniu z tabelą 4.1 zmieniono  $\lambda$  i  $\alpha_s$ .



Rysunek 4.2: Podobnie jak na rysunku 4.1, parametry hamiltonianu zostały tak dobrane, aby wynik na najmniejszą masę pokrył się z wynikiem na sieci, 1.73 GeV, na masę stanu  $0^{++}$ . W tym przypadku stosunek mas stanów  $2_0^{++}$  i  $0^{++}$ , wynosi 1.11. Nadal nie otrzymuje się degeneracji odpowiadającej symetrii obrotowej, ale widać zmianę w położeniach stanów  $2_1^{++}$  i  $2_2^{++}$  w stosunku do przykładu z rys. 4.1.

Charakterystyczne zachowanie się rozwiązań na masy stanu związanego gluonów efektywnych w funkcji  $\alpha_s$ , przedstawia rysunek 4.3. Masa stanu związanego rośnie do pewnej wartości  $\alpha_s$ , która w prezentowanym przypadku jest rzędu 0.5, a następnie maleje. Poczynając od pewnych  $\alpha_s$ , nie mamy dodatnich rozwiązań na wartości własne operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$ , przez co nie możemy wtedy mówić o istnieniu gluoniów. Świadczy to o tym, że dla zbyt dużych  $\alpha_s$  rachunek się załamuje, co jest wynikiem tego, że samoodziaływanie gluonów staje się słabsze niż wymiana efektywnego gluonu. Wartość  $\alpha_s$ , dla której rachunek się załamuje, jest zależna od wielkości  $\mu^2$ . Zaobserwowano ogólną tendencję, że im większe  $\mu^2$ , tym dla większych wartości  $\alpha_s$  można prowadzić obliczenia.



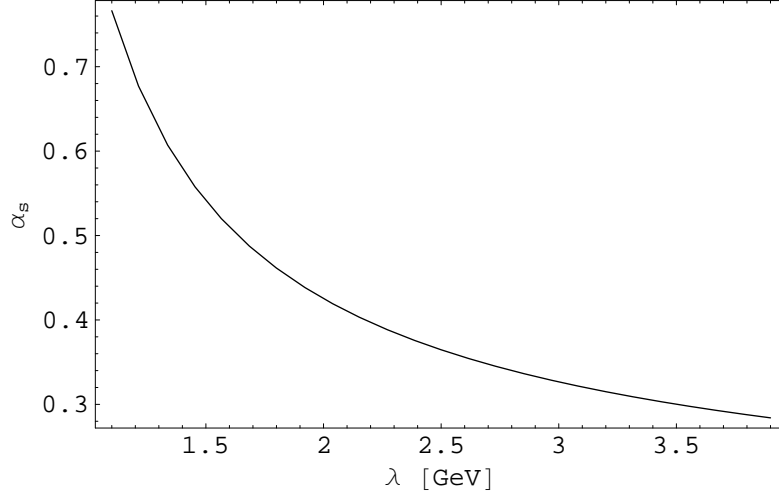
Rysunek 4.3: Zależność masy najlżejszego gluonium od  $\alpha_s$ . Maksimum w przypadku stanów wzbudzonych jest usytuowane dla większych wartości  $\alpha_s$ .  $\lambda = 1.92$  GeV,  $b = 2\lambda$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $n_{max} = 9$ ,  $l_{max} = 15$  (te same parametry co na rys. 4.1).

## 4.1 Niezależność rozwiązań od $\lambda$

Wiadomo, że stała sprzężenia  $g$  w naszym hamiltonianie musi zależeć od  $\lambda$  [21]. W naszym rachunku nie pojawiło się biegnięcie stałej sprzężenia, gdyż jest on tylko drugiego rzędu, a ewolucja stałej sprzężenia zaczyna się od trzeciego rzędu. Niemniej, spodziewamy się, że wiązanie gluonów w QCD powstaje dla dużych stałych sprzężenia [15] i musimy traktować  $\alpha_s$ , jako wielkość zależną od parametru  $\lambda$ . Niestety ścisła zależność  $\alpha_s$  od  $\lambda$  dla małych  $\lambda$  nie jest znana. Zmuszeni jesteśmy wybrać jakąś postać i rozważamy przykład

$$\alpha_s(\lambda) = \frac{4\pi}{11 \log \frac{\lambda^2}{\Lambda_{QCD}^2}}. \quad (4.1)$$

To jest wiodący rząd przybliżenia rozwiązania grupy renormalizacji na  $\alpha_s(s)$  dla macierzy rozpraszania [32] z zerową liczbą zapachów kwarków, zastąpilibyśmy tylko  $s$  przez  $\lambda^2$ . Podobny wzór otrzymuje się  $H_{\lambda QCDg}$  w rachunku hamiltonowskim [21]. Nie możemy spodziewać się, że tak proste przybliżenie  $\alpha_s$  da wyniki pokrywające się z wynikami na sieci, ale naszym celem nie jest otrzymanie na siłę zgodności z obliczeniami na sieci, lecz jakościowa ocena rzędów wielkości, które otrzymuje się w rachunku hamiltonowskim. Przede



Rysunek 4.4: Stała sprzężenia  $\alpha_s$  w funkcji  $\lambda$  z  $\Lambda_{QCD} = 522$  MeV.

wszystkim interesuje nas mechanizm powstawania gluonium, a porównanie z siecią mówi nam czy teoria gluonów efektywnych może być zgodna z wynikami innych sformułowań QCD.

Wprowadzenie zależności  $\alpha_s(\lambda)$  powoduje, że elementy macierzowe,  $H_{gg}$ , są funkcją szerokości hamiltonianu  $\lambda$ , parametrów ansatzu na masę  $\mu^2$ ,  $b$  i  $\delta$ , oraz parametru bazy,  $\Lambda$ , określającego pędkową szerokość najniższej funkcji radialnej. Używając zdefiniowanych w dodatku B.2, zredukowanych elementów macierzowych operatora  $\hat{M}^2 = P^+ H_{gg} - P^{\perp 2}$ , oznaczonych przez  $I_{nj;n'j'}^{ss'}$ , i opuszczając indeksy, mamy:

$$I = \Lambda_{QCD}^2 I \left( \frac{b^2}{\lambda^2}, \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}, \frac{\lambda^2}{\Lambda_{QCD}^2}, \delta \right), \quad (4.2)$$

z tym, że  $\lambda^2/\Lambda_{QCD}^2$  wchodzi do tej zależności tylko przez  $\alpha_s(\lambda)$ .

$\Lambda_{QCD}$  wybraliśmy w ten sposób, by dla wartości  $\lambda = 1.92$  dostać  $\alpha_s = 0.44$ . Daje to  $\Lambda_{QCD} = 522$  MeV. Aż 3 cyfry znaczące nie mają żadnej fizycznej interpretacji i służą tylko obliczeniom numerycznym. Wybór  $\Lambda_{QCD} \sim 500$  MeV, wynika stąd, że wymusza na rachunkach aby masa najbliższego gluonium wynosiła 1.73 GeV. Wybrana wartość  $\Lambda_{QCD}$  różni się od standardowo przyjmowanej, która jest rzędu 210 MeV. Jednak taka wartość  $\Lambda_{QCD}$  pochodzi z analizy danych z eksperymentów, w których udział biorą kwarki, najczęściej liczba zapachów kwarków wynosi 5. Poza tym, wartość  $\Lambda_{QCD} \sim 210$  MeV jest używana dla  $s \sim M_Z^2$ , gdzie  $M_Z$  to masa bozonu Z. Perturbacyjne wzory [33] na zmianę liczby zapachów kwarków z  $N_f = 5$  dla  $s = M_Z$  na

$N_f = 0$  w naszym przypadku prowadzą do wartości  $\Lambda_{QCD}$ , która użyta we wzorze (4.1), dla  $\lambda$  rzędu oczekiwanych mas gluonium, prowadzi do absurdalnie dużych wartości  $\alpha_s$ . Ale żadna z dostępnych analiz nie stosuje się do zakresu tak małych  $\lambda$  jakie rozpatrujemy w naszym hamiltonianie dla gluonium i nasz wybór jest w dużej mierze arbitralny. Z drugiej strony wiadomo, że w ściśle rozwiązywalnych modelach z asymptotyczną swobodą [22, 23] stała sprzężenia nie rośnie tak szybko jak na to wskazuje rachunek zaburzeń, a właściwy dobór wielkości  $\alpha_s$ , przy danym  $\lambda$ , zbliża hamiltonian obliczony w niskim rzędzie do odtwarzania wartości własnej pełnej teorii. Nasz wybór  $\Lambda_{QCD}$  rzędu 500 MeV należy traktować jako próbę oceny zgodności naszego podejścia z oczekiwaniami i ocenę rzędów wielkości.

Ścisłe rozwiązania otrzymane za pomocą ścisłego  $H_{\lambda\epsilon}$ , nie powinny zależeć od  $\lambda$ . Precyzyjnie mówiąc, tylko wartości własne i inne obserwable nie powinny zależeć od  $\lambda$ . Natomiast funkcje falowe mogą zależeć od  $\lambda$ . Np. dla bardzo dużych wartości  $\lambda$ , w porównaniu z masą stanu związanego, bardzo wiele sektorów Focka może mieć funkcje falowe różne od zera, zaś dla  $\lambda$  porównywalnych z masą stanu związanego, tylko od funkcji falowych z dominującą liczbą cząstek efektywnych, o rozmiarach rzędu  $1/\lambda$ , oczekuje się, że są istotnie różne od zera.

Jednak obliczenia  $H_{gg}$  prowadzone w drugim rzędzie rachunku zaburzeń oraz usunięcie rozbieżności małych  $x$  za pomocą ansatzu na  $\mu^2$ , powodują, że rozwiązania zagadnienia własnego dla  $H_{gg}$  mają prawo zmieniać się z  $\lambda$ . Łamanie niezmienniczości rozwiązań na obserwable względem zmian  $\lambda$  może być naprawione odpowiednim doбором zależności parametrów  $b$  i  $\delta$  w masie  $\mu^2$ . Gdyby taki dobór nie był możliwy albo prowadził do drastycznie szybko zmiennych funkcji, trudno byłoby utrzymać pogląd, że nasza procedura właściwie przybliża rozwiązania teorii. Okazuje się jednak, że parametry  $b$  i  $\delta$  oraz wartość oczekiwana  $\mu^2$  w stanie trójcząstkowym, niewiele zmieniają się z  $\lambda$ , kiedy ustali się masę najlżejszego gluonium. W poniższej tabeli prezentujemy wyniki takiego doboru  $b$  i  $\delta$ , aby masa najlżejszego gluonium była ustalona na 1.73 GeV. Wyniki te zostały uzyskane przy założeniu zależności pomiędzy silną stałą sprzężenia, a parametrem skali hamiltonianu efektywnego,  $\lambda$ , w postaci danej wzorem (4.1). Tabela podaje po jednej parze wartości  $b$  i  $\delta$  dla każdego  $\lambda$ . Wartości  $b$  i  $\delta$  można trochę zmieniać zachowując masę najlżejszego gluonium bez zmian przy danym  $\alpha_s(\lambda)$ , ale zakres akceptowalnych zmian jest niewielki (omawiamy to w następnym paragrafie). Istotnym faktem, pokazanym w tabeli 4.4 jest to, że w całym oczekiwanym zakresie  $\lambda$  istnieją rozsądne doборы  $b$  i  $\delta$ . Zauważmy, że w podanym zakresie  $\lambda$ , stała sprzężenia zmienia się od 0.29 do 0.72.

$\lambda$ [GeV]	$b/\lambda$	$\delta$	$\sqrt{\langle\mu^2\rangle}$	$M(2_0^{++})/M(0^{++})$	$M(2_1^{++})$	$M(2_2^{++})$
1.15	7.5	0.085	5.05	1.07	1.97	1.87
1.53	2.5	0.12	2.07	1.15	2.09	1.88
1.92	2.0	0.2	1.75	1.16	2.25	1.97
2.36	1.5	0.23	1.52	1.16	2.47	2.11
3.67	1.0	0.26	1.47	1.13	3.1	2.63

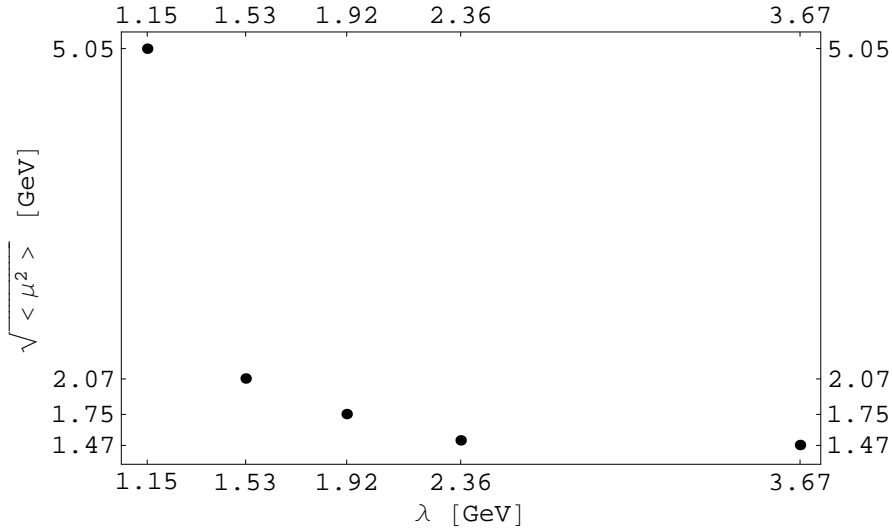
Tabela 4.4: Wartości parametrów  $b$  i  $\delta$ , w masie  $\mu^2$ , dające wartość masy najniższego stanu gluonium równe w 1.73 GeV, co odpowiada masie stanu  $0^{++}$  w obliczeniach na sieci. Stała sprzężenia  $\alpha_s$  zmienia się od 0.29, dla  $\lambda = 3.67$  GeV, do 0.72, dla  $\lambda = 1.15$  GeV. Dane z tej tabeli częściowo ilustruje rys. 4.5.

W wynikach podanych w tabeli 4.4, można zaobserwować, że  $b$  maleje, a  $\delta$  rośnie ze wzrostem  $\lambda$ . Te tendencje są zgodne z całą filozofią teorii. Im większa  $\lambda$ , tym potrzeba wprowadzenia ansatzu na masę gluonium powinna być mniejsza, ale tym silniej trzeba obcinać osobliwości małych  $x$ , żeby dynamika efektywna w sektorze dwugluonowym, jako część większej dynamiki, mogła przybliżać rozwiązania na wartości własne. Aby dokładniej zbadać konsekwencje zależności od parametrów  $b$  i  $\delta$  od  $\lambda$  dla naszego ansatzu na masę  $\mu^2$  zdefiniowaliśmy średnią masę w kwadracie, przypadającą na jeden gluon efektywny, jako

$$\langle\mu^2\rangle = \frac{1}{3} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_3 \nu^2(2, 3, 5), \quad (4.3)$$

gdzie  $\nu^2$  jest dane wzorem (3.69), a  $x_2 = 1 - x_1$ ,  $x_5 = x_1 - x_3$ , zgodnie z oznaczeniami pędów wprowadzonymi rysunkiem 3.2. Wynik zastosowania wzoru (4.3) przedstawia rysunek 4.5. Jak widać na rysunku, w miarę zmniejszania się wartości  $\lambda$ , a więc w miarę wzrostu  $\alpha_s$ , rośnie i masa  $\sqrt{\langle\mu^2\rangle}$ , przy czym charakterystyczna wielkość  $\sqrt{\langle\mu^2\rangle}$  jest rzędu masy najlżejszego gluonium.

Ustalenie, dla każdego  $\lambda$  z tabeli 4.4, wartości masy najlżejszego gluonium z  $j_z = 0$  na 1.73 GeV, spowodowało zmianę wartości najlżejszego gluonium z  $|j_z| = 1$  o 25%, a dla stanu z  $|j_z| = 2$  o 13%, podczas gdy  $\lambda$  zmieniła się o czynnik 5. W przypadku gdy  $\lambda$  zmieniła się o czynnik 7.5, odpowiednie zmiany były rzędu 60% dla  $|j_z| = 1$  i 40% dla  $|j_z| = 2$ . Pokazuje to, że ansatz na masę ma istotne znaczenie dla symetrii obrotowej w równaniu własnym dla  $H_{gg}$ . Np. stan  $2_0^{++}$  wydaje się być stabilny, a stany  $2_1^{++}$  i  $2_2^{++}$  reagują na zmiany  $\lambda$  w zakresie od kilku do kilkudziesięciu procent.



Rysunek 4.5: Średnia masa przypadająca na jeden gluon efektywny w funkcji  $\lambda$ , przy zależności  $\alpha_s(\lambda)$  danej wzorem (4.1). Dla każdego  $\lambda$  parametry  $b$  i  $\delta$  są dobrane tak, by masa  $M(0^{++}) = 1.73$  GeV i przyjmują wartości z tabeli 4.2 (każdy punkt wymaga około 10 godzin czasu obliczeniowego dla średniej klasy komputera PC, a znalezienie rozsądnych wartości  $b$  i  $d$  wymagało kilku obliczeń na każdy punkt).

## 4.2 Niezależność od wyboru parametrów $\mu^2$

Dla różnych wartości parametrów  $b$  i  $\delta$ , określających wielkość masy  $\mu^2$ , byliśmy w stanie odtworzyć w przybliżeniu tę samą masę najlżejszego gluonium. Tabela 4.5 pokazuje, że zmianę parametru  $b$  o czynnik 3 można było skompensować taką zmianą parametru  $\delta$ , by rozwiązanie na masę stanu  $0^{++}$  pozostawało niezmienione.

$M(0^{++})$	$b/\lambda$	$\delta$	$\sqrt{\langle \mu^2 \rangle}$	$M(2_0^{++})/M(0^{++})$	$M(2_1^{++})$	$M(2_2^{++})$
1.72	1.0	0.085	1.12	1.19	2.16	1.91
1.72	1.5	0.15	1.46	1.17	2.23	1.96
1.73	2.0	0.2	1.75	1.16	2.25	1.97
1.77	3.0	0.27	2.27	1.16	2.33	2.04

Tabela 4.5 Zależność od parametrów  $b$  i  $\delta$ , dla  $\lambda = 1.92$  GeV, co przy przyjętej przez nas wartości  $\Lambda_{QCD} = 522$  MeV, odpowiada  $\alpha_s = 0.44$ .

Zauważmy, że również masy najlżejszych gluoniów z  $|j_z| = 1, 2$  niewiele się zmieniają. Sugeruje to, że naprawa symetrii obrotowej wymaga bardziej skomplikowanych zależności  $\mu^2$  od pędów cząstek, w pośrednim stanie trójcząstkowym, być może zawierających pędy poprzeczne, aby możliwe było

uzyskanie degeneracji stanów z większą precyzją. Z pewnością znajomość dynamicznego operatora momentu pędu pomogła by w znalezieniu najbardziej pożądanej postaci  $\mu^2$ , dla odtworzenia degeneracji stanów i poklasyfikowania ich w multiplety. Podobnie, zgadnięcie zależności  $\mu^2$  od pędów, dające niezły opis degeneracji, mogłoby być pomocne w znalezieniu pełnego operatora momentu pędu. Nie twierdzimy jednakże, że sam ansatz na masę jest w stanie rozwiązać problem symetrii obrotowej w sformułowaniu dynamiki na froncie świetlnym, a jedynie, że przy jego pomocy możliwe jest poprawienie wyników na wartości mas stanów tak, by zbliżyć je do wymagań symetrii obrotowej.

Jedyną wielkość, która zmienia się znacząco ze zmianami parametrów  $b$  i  $\delta$  to wprowadzona wzorem (4.3), średnia masa w kwadracie. Jednak jej definicja nie uwzględnia żadnej dynamiki i to może być przyczyną jej zachowania. Lecz nawet tak prosta miara jak  $\langle \mu^2 \rangle$ , ma mniejszą amplitudę zmian niż parametry  $b$  i  $\delta$  (w zaprezentowanych przykładach,  $b$  i  $\delta$  zmieniają się o czynnik rzędu 3, a  $\sqrt{\langle \mu^2 \rangle}$  tylko o czynnik rzędu 2).

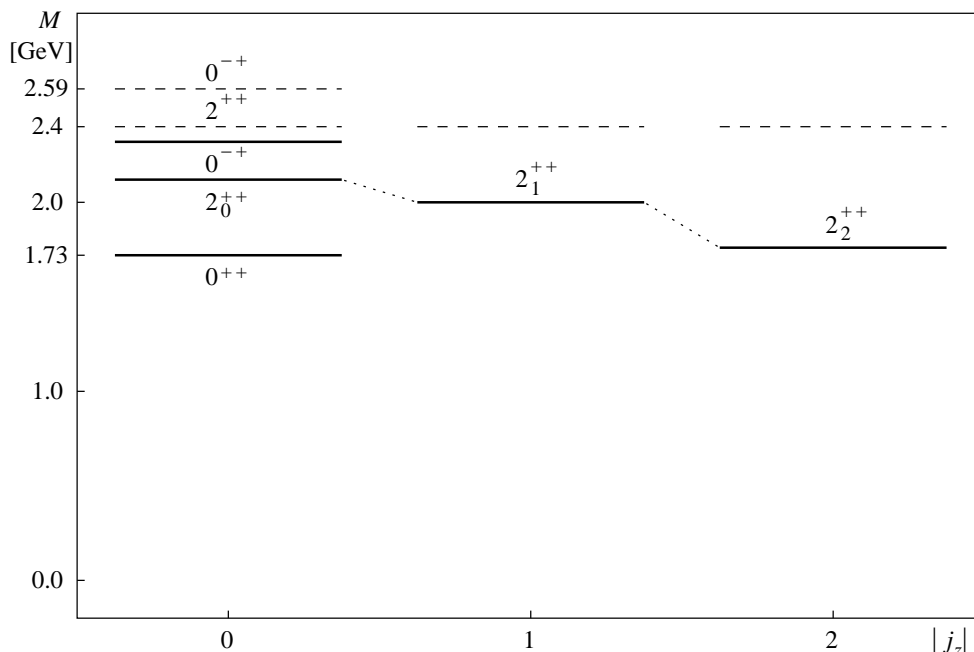
### 4.3 Przypadek $f_\lambda = \exp[-(\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2)^2/\lambda^4]$

W przypadku wyboru czynnika kształtu  $f_\lambda$  w postaci danej gaussowską zależnością od różnicy kwadratów mas inwariantnych, jak we wzorze (2.35)<sup>1</sup>, zachowują ważność wszelkie uwagi jakie podaliśmy dla  $f_\lambda$  danego wzorem (2.39). Nasze obawy, że niezerowa granica w wyrażeniu (2.40), może prowadzić do generowania dużych operatorów przydiagonalnych<sup>2</sup> i przez to uniemożliwiać otrzymanie akceptowalnych wyników na masy stanów związanych w niskim rzędzie rachunku zaburzeń, okazały się nieuzasadnione. Czynniki kształtu dany wyrażeniem (2.39), sprawuje się lepiej niż  $f_\lambda = \exp[-(\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2)^2/\lambda^4]$ . Być może ten czynnik generuje zbyt gwałtowną ewolucję grupy renormalizacji dla rozwiązania na  $H_{\lambda\epsilon}$ , przez co, drugi rząd w  $g$  znajomości  $H_{\lambda\epsilon}$  jest niewystarczający. Tabela 4.6 oraz rysunek 4.6, pokazują charakterystyczne wyniki dla przypadku czynnika kształtu z tytułu niniejszego paragrafu. Wartość  $\alpha_s = 0.24$ , przy  $\lambda = 1.92$  GeV, wymusza  $\Lambda_{QCD} = 172$  MeV. Rzędy wielkości są więc dla takiego wyboru czynnika kształtu zachowane, gorsza jest tylko degeneracja stanów o różnych  $j_z$ .

<sup>1</sup> Wyniki omawiane wcześniej otrzymano za pomocą  $f_\lambda = \exp[-(\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b)^2/\lambda^2]$ , (2.39).

<sup>2</sup> „Przydiagonalność” oznacza małą różnicę,  $\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b$ .





Rysunek 4.6: Ilustracja zmiany  $f_\lambda = \exp[-(\mathcal{M}_a - \mathcal{M}_b)^2/\lambda^2]$  na  $f_\lambda = \exp[-(\mathcal{M}_a^2 - \mathcal{M}_b^2)^2/\lambda^4]$ . Wartości mas są podane w tabeli 4.6. Wartości parametrów,  $\lambda = 1.92$  GeV,  $b = 2\lambda$ ,  $\delta = 0.2$ , są takie same jak w przypadku z rys. 4.1. Aby dla tej wartości  $\lambda$  dostać właściwą masę stanu  $0^{++}$  należało przyjąć  $\alpha_s = 0.24$ , co odpowiada wartości  $\Lambda_{QCD} = 172$  MeV ze wzoru (4.1). Zachowanie się poziomów energetycznych jak na rysunku, dla tego czynnika kształtu jest typowe.  $n_{max} = 5$ ,  $l_{max} = 15$ .

$M(j_z = 0)$ [GeV]	$M( j_z  = 1)$ [GeV]	$M( j_z  = 2)$ [GeV]
1.73	2.08	1.78
2.17	2.32	2.36
2.34	2.33	2.4
2.34	2.49	2.51
2.38	2.67	2.69

Tabela 4.6: Wartości mas odpowiadające rys. 4.6.

## 4.4 Stabilność numeryczna wyników

Nasze obliczenia numeryczne miały za zadanie podanie jakościowego obrazu do jakiego prowadzi dynamika efektywnych gluonów wraz z ansatzem na masę gluonów efektywnych,  $\mu^2$ . Otrzymanie wartości własnych operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$  dla

gluonium było możliwe jedynie na drodze numerycznej, przy czym komputer był potrzebny zarówno do obliczenia elementów macierzowych,  $I$ , operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$ , jak i do zdiagonalizowania macierzy hamiltonianu efektywnego zbudowanej z tych elementów macierzowych. Elementy macierzowe  $I$  były dane przez pięciowymiarowe całki zawierające osobliwe, kasujące się wyrażenia. Dodatek B.2 przedstawia funkcje podcałkowe dla elementów macierzowych i użyte zmienne całkowania. Co prawda, możliwe jest sprowadzenie pięciowymiarowych całek, do całek czterowymiarowych, dla pewnych wyborów czynnika kształtu,  $f_\lambda$ , ale funkcje podcałkowe w takim przypadku wyrażają się przez czasochłonne funkcje specjalne, co czyni taką redukcję wymiaru całek, nieopłacalną.

#### 4.4.1 Całkowanie numeryczne

Do obliczenia elementów macierzowych,  $I$ , użyto dwóch niezależnych procedur całkowania numerycznego. Procedury „Vegas” [34] oraz kwadratur Gauss’a (używamy kwadratur Gauss’a-Czebyszewa, Gauss’a-Laguerre’a i Gauss’a-Legendre’a). Ze względu na bardzo dużą liczbę koniecznych całkowań dla znalezienia akceptowalnych parametrów  $b$  i  $\delta$ , oraz przeanalizowania różnych wyborów parametru bazy  $\Lambda$ , większość wyników otrzymano używając kwadratur Gauss’a. Procedura „Vegas” służyła głównie do weryfikacji poprawności wyników, otrzymywanych za pomocą kwadratur Gauss’a, oraz pozwoliła ustalić błąd całkowania za pomocą kwadratur, który przyjęto za równy odchyleniu standardowemu podawanemu przez procedurę „Vegas”, jeśli wynik całkowania za pomocą kwadratur znajdował się w granicach wyznaczonych przez odchylenie standardowe.

Macierz operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$  w użytej bazie jest macierzą przydiagonalną. Stosunek najmniejszych niezerowych elementów, obliczanych poprzez całkowanie numeryczne, do dominujących elementów jest rzędu 0.01. Precyzja wyliczania elementów macierzowych sięgała od 0.1% dla elementów diagonalnych do 100% dla najmniejszych elementów pozadiagonalnych. Różnica rzędów wielkości pomiędzy elementami diagonalnymi i najmniejszymi elementami pozadiagonalnymi przekładała się na błąd w wyniku na najniższe wartości własne macierzy  $\hat{\mathcal{M}}^2$  rzędu 0.2% dla interesującego nas zakresu stałej sprężenia  $\alpha_s$  (błąd ten rośnie z  $\alpha_s$ ).

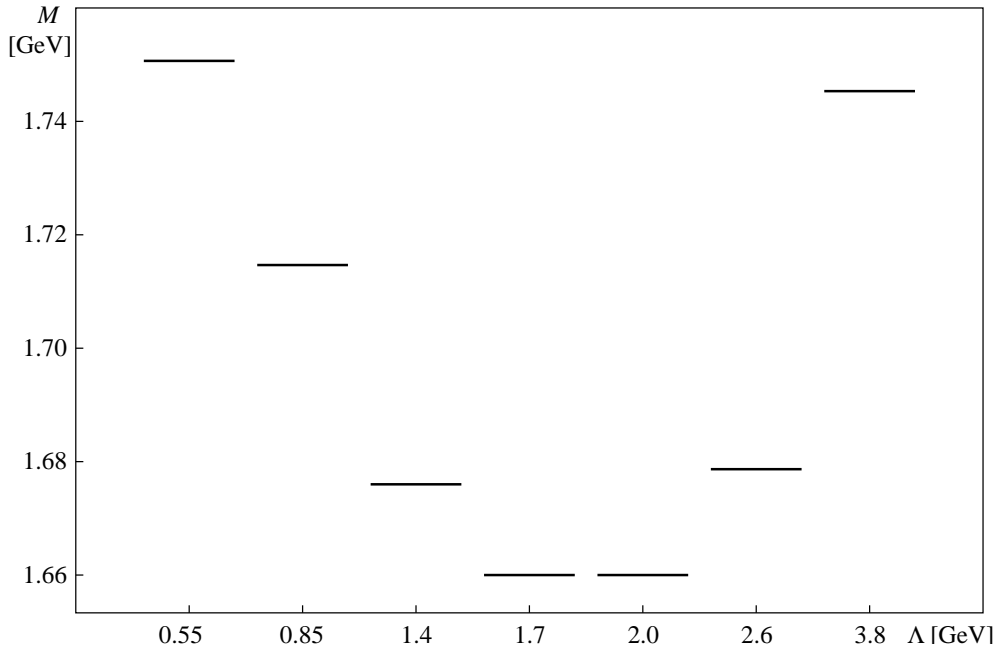
Źródłem większych błędów jest prawidłowy dobór parametru bazy  $\Lambda$ , patrz rys. 4.7. Błąd ten szacujemy na 1%, dla najmniejszych wartości mas gluoniów.

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wyborów bazy, używając jako funkcji kątowych zwykłych harmonik sferycznych oraz funkcji definiujących stany własne  $\vec{J}_0^2$ , podanych w dodatku C. Różnice w wartościach mas dla najlżej-

szych gluoniów, nie przekraczały 0.5% w przypadku zastosowania obu tych wyborów.

#### 4.4.2 Zależność od parametru bazy $\Lambda$

Rysunek 4.7 pokazuje, że w szerokim zakresie zmienności  $\Lambda$  wyniki diagonalizacji  $H_{gg}$  zmieniają się nieznacznie ze zmianą  $\Lambda$ .



Rysunek 4.7: Zależność rozwiązań od parametru bazy  $\Lambda$ .  $\lambda = 1.7$  GeV,  $b/\lambda = 1.53$ ,  $\delta = 0.115$ ,  $\alpha_s = 0.48$ ,  $n_{max} = 6$ ,  $l_{max} = 15$ . Szczegółowe wartości zawiera tabela 4.3.

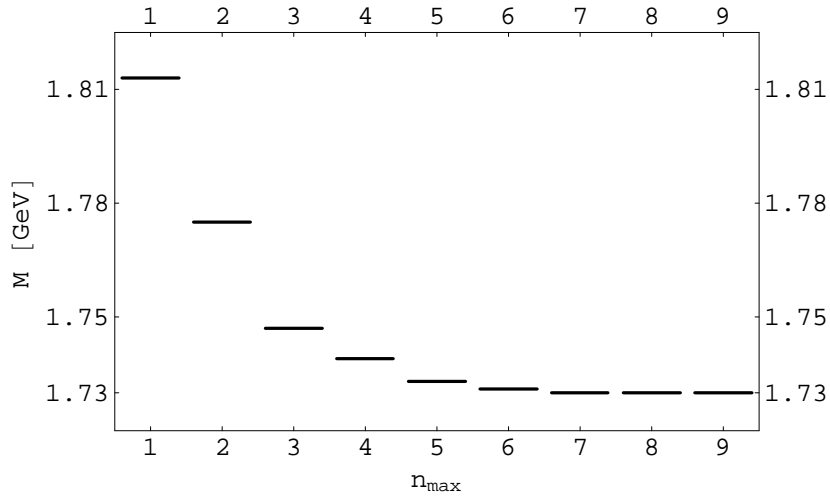
$\Lambda$ [GeV]	$M(j_z = 0)$ [GeV]	$M( j_z  = 1)$ [GeV]	$M( j_z  = 2)$ [GeV]
0.55	1.75	2.09	1.87
0.85	1.72	2.07	1.86
1.4	1.67	2.09	1.86
1.7	1.66	2.1	1.87
2.0	1.66	2.11	1.9
2.6	1.68	2.11	1.99
3.8	1.74	2.17	2.26

Tabela 4.3: Wartości najmniejszych mas dla  $j_z = 0$ ,  $|j_z| = 1$  i  $|j_z| = 2$ .  $\lambda = 1.7$  GeV,  $b/\lambda = 1.53$ ,  $\delta = 0.115$ ,  $\alpha_s = 0.48$ ,  $n_{max} = 6$ ,  $l_{max} = 15$ .

Zmiana  $\Lambda$ , przy ustalonym  $\lambda$ , o czynnik bliski 7 powoduje zmiany w masie najlżejszego gluonium o mniej niż 6%, a w przypadku, gdybyśmy się ograniczyli do zmian  $\Lambda$  o czynnik rzędu 3, wówczas czułość w rozpatrywanej masie byłaby tylko rzędu 3%. Można powiedzieć, że czułość ze względu na wybór  $\Lambda$  jest mała, ale nie zerowa. Czułość ta zależy od wielkości stałej sprzężenia  $\alpha_s$ , której używamy do obliczeń. Dla małych  $\alpha_s$  wyniki są dobrze stabilne gdy  $\Lambda < \lambda$ , natomiast dla dużych  $\alpha_s$ , dla  $\Lambda \sim \lambda$ .

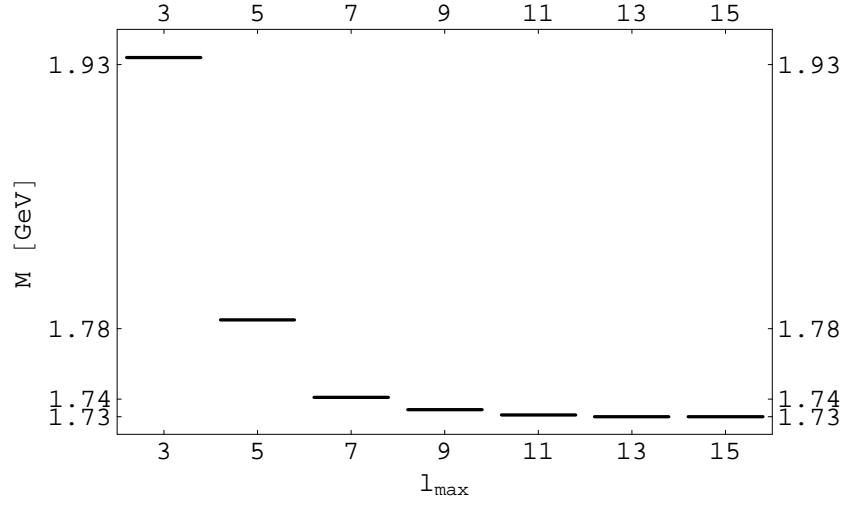
### 4.4.3 Zależność od liczby użytych wektorów bazy

Otrzymane rozwiązania dość szybko stabilizują się wraz ze wzrostem liczby wektorów bazy, zarówno przy zwiększaniu liczby funkcji radialnych, jak i funkcji kątowych.  $l_{max}$  wybierano jako liczbę nieparzystą, aby zawsze stan o  $s = -$  (konwencja oznaczeń stanów polaryzacyjnych jest wyjaśniona w dodatku B.1) był obecny podczas diagonalizacji. W sumie liczba wektorów bazy wynosiła do 300 i diagonalizacja hamiltonianu  $\hat{M}^2$  nie przedstawiała problemów numerycznych, tak jak obliczenie elementów macierzowych  $\hat{M}^2$ . Poniższe dwa rysunki ilustrują stabilizację rozwiązań wraz ze wzrostem  $l_{max}$  i  $n_{max}$ . Dla  $n_{max} \geq 5$  i  $l_{max} \geq 11$  błąd na wartość masy najlżejszego gluonium nie



Rysunek 4.8: Masy najlżejszego gluonium dla ustalonego  $l_{max} = 15$  i  $n_{max}$  zmieniającego się od 1 do 9.  $\lambda = 1.92$  GeV,  $b = 2\lambda$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\alpha_s = 0.44$ .

przekracza 0.2%, a dla pierwszego stanu wzbudzonego nie przekracza 0.5%, zaś dla czwartego stanu wzbudzonego nie przekracza 6%. Wykorzystanie



Rysunek 4.9: Masy najlżejszego gluonium dla ustalonego  $n_{\max} = 9$  i  $l_{\max}$  zmieniającego się od 3 do 15.  $\lambda = 1.92$  GeV,  $b = 2\lambda$ ,  $\delta = 0.2$ ,  $\alpha_s = 0.44$ .

kwadratur Gauss'a i częściowa tabularyzacja jądra operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$  (stabularyzowano jądro tego operatora po odcałkowaniu po zmiennych radialnych i kącie względnym  $\gamma$ , patrz dodatek B.2) pozwoliło na obliczenia z  $l_{\max} = 15$ , bez znacznego zwiększania czasu potrzebnego na policzenie wszystkich elementów macierzowych,  $I$ , dla każdego z wyborów  $b$ ,  $\delta$  i  $\Lambda$  przy ustalonym  $\lambda$ .

#### 4.4.4 Dokładność obliczeń

Reasumując uwagi poczynione w poprzednich częściach rozdziału, błąd w wartości masy stanu podstawowego gluonium nie przekracza 2%, a dla kilku kolejnych stanów rośnie osiągając wartość mniejszą niż 10% dla czwartego stanu wzbudzonego. Błędy związane z ograniczeniem się tylko do sektorów dwu i trójczęstkowego oraz wprowadzeniem ansatzu na masę  $\mu^2$ , podobnie jak z ograniczeniem się do rzędu  $g^2$ , nie mogą być precyzyjnie oszacowane i są prawdopodobnie większe. Osiągnięta dokładność numeryczna pozwoliła nam jednak wyciągnąć wnioski o sensowności zrobionych założeń i dowieść, że wyniki są rezultatem analizy efektywnej teorii cząstek, a nie przypadkowymi liczbami.

# Rozdział 5

## Podsumowanie

Pokazaliśmy, że procedura grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych otwiera drogę do systematycznej analizy problemu stanów związanych w QCD. Wstępny charakter tych badań wymusił na nas zrobienie uproszczeń, z których największym było wprowadzenie ansatzu na masę gluonów w sektorze trójgluonowym, kiedy rozważa się gluonium. Gluonium znalazło się w centrum naszego zainteresowania z powodu nieabelowych oddziaływań gluonów, które prowadzą do asymptotycznej swobody, niezależnie od oddziaływań jakie niosą ze sobą kwarki. Procedura RGPEP, która ma na celu realizację programu Dirac'a zbudowania ab initio teorii kwantowej, spełniającej zasady szczególnej teorii względności (o czym mówiliśmy na przykładzie teorii  $\phi^3$ ) pozwoliła nam na przybliżenie skomplikowanego teoriopolewego problemu stanów związanych gluonów przez równanie Schrödingera dla układu dwóch gluonów efektywnych.

W redukcji dynamiki gluonów do sektora dwucząstkowego wprowadzamy ansatz na masę gluonów, który usunął rozbieżności małych  $x$  na poziomie równania własnego dla zrenormalizowanego hamiltonianu efektywnego. Za pomocą obliczeń numerycznych pokazaliśmy, że otrzymany w ten sposób opis gluonium jest sensowny. Otrzymaliśmy rozwiązania w postaci stanów związanych dwóch gluonów, które wykazują słabą czułość na konkretną postać  $\mu^2$ . Nasze wyniki nie tylko nie zaprzeczają możliwości budowania opisu hadronów za pomocą cząstek efektywnych w QCD, lecz zachęcają do idei połączenia kwantowej teorii pola z modelami konstytuentnymi za pomocą procedury RGPEP.

Wyniki jakie otrzymaliśmy na wartości masy gluonium są zgodne z wynikami sieciowymi. Byliśmy w stanie otrzymać masę najlżejszego gluonium taką samą jak przewiduje sieć. Wynik ten otrzymaliśmy dla  $\lambda$  rzędu masy gluonium, co jest warunkiem akceptacji opisu za pomocą cząstek efektywnych w teoriach z asymptotyczną swobodą. Stany wzbudzone układają się blisko

stanów otrzymanych na sieci wtedy, gdy parametr skali hamiltonianu efektywnego jest jakościowo właściwego rzędu i odpowiadająca mu stała sprzężenia również przyjmuje oczekiwany rząd wielkości.

Diagonalizację hamiltonianu efektywnego wykonano używając bazy swobodnego momentu pędu dla gluonów efektywnych. Choć w obliczeniach numerycznych można używać i innych baz, to nasza konstrukcja wydaje się być elementem koniecznym dla przyszłej analizy korzystającej z dynamicznego operatora momentu pędu, jak tego wymaga program Diraca.

# Dodatek A

## Front świetlny

Współrzędne frontu świetlnego są zdefiniowane następująco:

$$x^+ = x^0 + x^3, \quad x^- = x^0 - x^3, \quad x^\perp = (x^1, x^2). \quad (\text{A.1})$$

Niezerowe składowe tensor metrycznego  $g^{\mu\nu}$  to  $g^{+-} = g^{-+} = 2$  oraz  $g^{ii} = -1$ , dla  $i = 1, 2$ . Iloczyn skalarny dwóch czterowektorów  $a$  i  $b$  jest więc dany przez,

$$ab = \frac{1}{2}a^+b^- + \frac{1}{2}a^-b^+ - a^\perp b^\perp. \quad (\text{A.2})$$

Pochodne cząstkowe:

$$\partial^\pm = 2\partial_{\mp} = 2\frac{\partial}{\partial x^\mp}. \quad (\text{A.3})$$

Operator  $1/\partial^+$  zdefiniowany jest następująco, dla funkcji  $f(x^-)$  zachodzi,

$$\frac{1}{\partial^+}f(x^-) = \frac{1}{4}\int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-), \quad (\text{A.4})$$

gdzie  $\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x)$ .

Dla dowolnych dwóch pędów cząstek  $p_1$  i  $p_2$  można wprowadzić rozkład na pęd całości i pęd względny, zdefiniujemy:

$$P^{+,\perp} = p_1^{+,\perp} + p_2^{+,\perp}, \quad (\text{A.5})$$

$$x_1 = \frac{p_1^+}{P^+} (= x), \quad (\text{A.6})$$

$$\kappa_{12}^\perp = \frac{p_1^\perp p_2^+ - p_1^+ p_2^\perp}{P^+} (= \kappa^\perp). \quad (\text{A.7})$$

Zamiana ta wiąże się ze zmianą miar całkowania z  $[p_1 p_2]$  na  $[P][x\kappa]$ ,

$$[p_1 p_2] = [P][x\kappa], \quad (\text{A.8})$$



gdzie  $[x\kappa]$  jest dane przez,

$$[x\kappa] = \frac{d^2\kappa^\perp dx}{16\pi^3 x(1-x)} \theta(x)\theta(1-x). \quad (\text{A.9})$$

Pole gluonowe,  $A^\perp$ , ma rozkład na operatory kreacji i anihilacji dany wzorem (3.9). Jeśli polaryzację wybierzemy jako prawoskrętną i lewoskrętną, wówczas wektory polaryzacji mają postać:

$$\varepsilon_{\circlearrowleft}^\perp = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i), \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_{\circlearrowright}^\perp = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i). \quad (\text{A.11})$$

Spełniają one następujące relacje:

$$\varepsilon_\sigma^{*\perp} \varepsilon_{\sigma'}^\perp = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_\sigma \varepsilon_\sigma^{*i} \varepsilon_\sigma^j = \delta_{ij}. \quad (\text{A.13})$$

# Dodatek B

## Szczegóły obliczeniowe

### B.1 Baza

W celu wykonania obliczeń numerycznych musimy zdyskretyzować zagadnienie własne dla  $H_{gg}$ . W tym celu wybierzemy bazę zupełną stanów rozpinających podprzestrzeń w sektorze dwugluonowym  $|g_\lambda g_\lambda\rangle$ . W obliczeniach numerycznych możemy uwzględnić jedynie skończoną liczbę wektorów bazowych, która decyduje o jakości przybliżenia numerycznego.

Pojedynczy stan w przestrzeni rozpiętej przez dwa gluony niosący całkowity pęd  $P = (P^+, P^\perp)$  ma postać:

$$|P; \sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2\rangle = NP^+ \int [P_{12}] [x\kappa] \tilde{\delta}(P - P_{12}) \phi_{\sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2}(x, \kappa^\perp) a_{p_1 \sigma_1 c_1}^\dagger a_{p_2 \sigma_2 c_2}^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.1})$$

gdzie  $P_{12}^{+, \perp} = p_1^{+, \perp} + p_2^{+, \perp}$ , a  $N$  to czynnik normalizacyjny.

Funkcję  $\phi_{\sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2}(x, \kappa^\perp)$  możemy podzielić na część kolorową i pędową.

$$\phi_{\sigma_1, \sigma_2, c_1, c_2}(x, \kappa^\perp) = C_{c_1, c_2} \tilde{\phi}_{\sigma_1, \sigma_2}(x, \kappa^\perp). \quad (\text{B.2})$$

Ponieważ chcemy opisywać stany związane w QCD to możemy się ograniczyć tylko do stanów nie niosących koloru netto. W naszym przypadku oznacza to, że [28]

$$C_{c_1, c_2} = \delta_{c_1, c_2}. \quad (\text{B.3})$$

Gluony jako cząstki bezmasowe mają dwie polaryzacje, które możemy wybrać jako polaryzację prawoskrętną  $\sigma = \circlearrowright$  i lewoskrętną  $\sigma = \circlearrowleft$ , tak więc stan dwugluonowy ma 4 stany polaryzacyjne. Zdefiniujemy następującą bazę

w przestrzeni polaryzacji gluonów

$$|p_1 p_2, \uparrow\rangle = \sum_c a_{p_1 \circ c}^\dagger a_{p_2 \circ c}^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.4})$$

$$|p_1 p_2, \downarrow\rangle = \sum_c a_{p_1 \circ c}^\dagger a_{p_2 \circ c}^\dagger |0\rangle, \quad (\text{B.5})$$

$$|p_1 p_2, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_c \left( a_{p_1 \circ c}^\dagger a_{p_2 \circ c}^\dagger |0\rangle + a_{p_1 \circ c}^\dagger a_{p_2 \circ c}^\dagger |0\rangle \right), \quad (\text{B.6})$$

$$|p_1 p_2, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_c \left( a_{p_1 \circ c}^\dagger a_{p_2 \circ c}^\dagger |0\rangle - a_{p_1 \circ c}^\dagger a_{p_2 \circ c}^\dagger |0\rangle \right). \quad (\text{B.7})$$

Funkcję  $\tilde{\phi}_s(x, \kappa^\perp)$ , gdzie  $s = \uparrow, \downarrow, +, -$  rozłożymy w bazie zbudowanej z wielomianów Laguerre'a i harmonik sferycznych. W przeciwieństwie do rachunków równoczesowych, ze względu na dynamiczny charakter generatorów obrotu wokół osi  $x$  i  $y$ , na froncie świetlnym, nie wiąże się to ze zdefiniowaniem momentu pędu dla stanów opisanych przez odpowiednie harmoniki sferyczne. Jednak rzut momentu pędu na oś  $z$  jest dobrą liczbą kwantową do konstrukcji bazy, bowiem  $J_z$  jest operatorem kinematycznym i komutuje z hamiltonianem. W rachunkach na froncie jest to więc tylko wybór bazy zupełnej stanów. Mamy więc

$$\tilde{\phi}_s(x, \kappa^\perp) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{nlm}^s R_n \left( \frac{4\vec{k}^2}{\Lambda^2} \right) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (\text{B.8})$$

gdzie zmienne  $k, \theta, \varphi$  określają pewien wektor  $\vec{k}$ , który wiąże się z  $x$  i  $\kappa^\perp$  następująco,

$$k^\perp = \kappa^\perp, \quad (\text{B.9})$$

$$k^3 = \left( x - \frac{1}{2} \right) \mathcal{M}, \quad (\text{B.10})$$

natomiast  $\mathcal{M}^2 = \kappa^2/[x(1-x)]$ .  $\vec{k}$  spełnia ponadto

$$\vec{k}^2 = \frac{1}{4} \mathcal{M}^2, \quad (\text{B.11})$$

$$\cos \theta = \frac{k^3}{k} = 2x - 1, \quad (\text{B.12})$$

$$\tan \varphi = \frac{k^2}{k^1} = \frac{\kappa^2}{\kappa^1}. \quad (\text{B.13})$$

$\Lambda$  to parametr o wymiarze pędu charakteryzujący szerokość najniższego wielomianu Laguerre'a. Zamiast  $\mathcal{M}^2$  będziemy używać bezwymiarowej zmiennej

$w = \mathcal{M}^2/\Lambda^2$ , wtedy

$$R_n(w) = \exp\left(-\frac{w}{2}\right) L_n(w), \quad (\text{B.14})$$

gdzie  $L_n(w)$  to  $n$ -ty wielomian Laguerre'a.

W przypadku  $s = \uparrow, \downarrow, +$ , wkład dają tylko parzyste harmoniki sferyczne, natomiast dla  $s = -$  tylko nieparzyste.

Rozkład ten wykorzystamy do zdefiniowania stanów bazowych w jakich przeprowadzimy diagonalizację hamiltonianu  $H_{gg}$ . Zdefiniujemy

$$|P; n, j, j_z; s\rangle = NP^+ \int [P_{12}][x\kappa] \tilde{\delta}(P - P_{12}) R_n(w) Y_{jj_z}(\theta, \varphi) |p_1 p_2, s\rangle, \quad (\text{B.15})$$

gdzie czynnik normalizacyjny  $N$ , wynosi

$$N = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Lambda}. \quad (\text{B.16})$$

$\Lambda$  to parametr charakteryzujący szerokość najniższej radialnej funkcji falowej. Dla dużych wartości  $n$ , obliczenia powinny być powtarzalne dla różnych wyborów  $\Lambda$ , jednak w przypadku użycia jedynie kilku funkcji radialnych właściwy dobór  $\Lambda$  jest istotny.

Tak zdefiniowane stany,  $|P; n, j, j_z; s\rangle$ , spełniają następujący warunek unormowania

$$\langle P'; n', j', j'_z; s' | P; n, j, j_z; s \rangle = P^+ \tilde{\delta}(P - P') \delta_{nn'} \delta_{jj'} \delta_{j_z j'_z} \delta_{ss'}. \quad (\text{B.17})$$

Ponieważ na froncie świetlnym wybór harmonik sferycznych nie jest niczym wyróżniony, to możemy zastosować inne wybory. Alternatywą jest na przykład baza swobodnego momentu pędu  $\vec{J}_0$ , przedstawiona w dodatku C. Dla przypadku  $s = \uparrow, \downarrow$ , baza zbudowana ze stanów własnych  $\vec{J}_0$  pokrywa się z wyborem harmonik sferycznych, natomiast dla podprzestrzeni rozpiętej przez stany z  $s = +$  i  $s = -$ , mamy

$$\begin{aligned} |P; n, j, j_z, \pm\rangle &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{\Lambda} P^+ \int [P_{12}][x\kappa] \tilde{\delta}(P - P_{12}) \\ &\times R_n\left(\frac{\mathcal{M}^2}{\Lambda^2}\right) [W_{jj_z}^+(x, \kappa^\perp) |p_1 p_2, +\rangle + W_{jj_z}^-(x, \kappa^\perp) |p_1 p_2, -\rangle], \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

gdzie  $W_{jj_z}^+$  i  $W_{jj_z}^-$  to odpowiednie funkcje pędów.

W obliczeniach numerycznych korzystamy z obu wyborów.

$$W_{j, j_z}^s(\theta, \varphi) = e^{i(m+s_z)\varphi} \tilde{W}_{j, m}^s(x). \quad (\text{B.19})$$

$j_z = m + s_z$ ,  $s_z = \mp 2$  dla  $s = \uparrow, \downarrow$  natomiast  $s_z = 0$  dla  $s = +, -$ .

Ogólnie dowolny stan o pędzie  $P$  i rzucie momentu pędu na oś  $z$ , równym  $j_z$ , można zapisać w bazie stanów  $|P; n, j, j_z; s\rangle$ ,

$$|P, j_z\rangle = \sum_{njs} c_{njs}^{j_z} |P; n, j, j_z; s\rangle. \quad (\text{B.20})$$

## B.2 Równanie własne

Zdefiniujmy zredukowany element macierzowy,  $I_{nj;n'j'}^{ss'}$ , operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$ ,

$$\hat{\mathcal{M}}^2 = P^+ H_{gg} - P^{\perp 2}, \quad (\text{B.21})$$

przez

$$I_{nj;n'j'}^{ss'} = \frac{\langle P; n, j, j_z; s | \hat{\mathcal{M}}^2 | P'; n', j', j_z; s' \rangle}{\delta(P - P')}. \quad (\text{B.22})$$

Wartość  $j_z$  jest po obu stronach operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$  taka sama, gdyż  $[J_z, H_{gg}] = 0$ . Wówczas korzystając z (B.17) i (B.20) równanie własne (3.41) przyjmuje postać

$$\sum_{n'j's'} I_{nj;n'j'}^{ss'} c_{n'j's'}^{j_z} = M^2 c_{njs}^{j_z}. \quad (\text{B.23})$$

$s$  przyjmuje wartości  $\uparrow, \downarrow, +, -$ , natomiast zakres  $n$  i  $j$  jest uwarunkowany przez nasze możliwości obliczeniowe. Równanie (B.23) sprzęga ze sobą stany o wszystkich  $s$ . Macierz  $I^{ss'}$  ma bowiem następującą strukturę

$$I^{ss'} = \begin{bmatrix} I^{\uparrow\downarrow} & 0 & I^{\uparrow+} & I^{\uparrow-} \\ 0 & I^{\downarrow\downarrow} & I^{\downarrow+} & I^{\downarrow-} \\ I^{+\uparrow} & I^{+\downarrow} & I^{++} & I^{+-} \\ I^{-\uparrow} & I^{-\downarrow} & I^{-+} & I^{--} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.24})$$

Dla  $j_z = 0$  części  $I^{+-}$  i  $I^{-+}$  są równe zeru. W bazie stanów  $|P; n, j, j_z; s\rangle$ , elementy macierzowe  $I_{nj;n'j'}^{ss'}$  są rzeczywiste i macierz  $I$  jest symetryczna.

### B.2.1 Elementy macierzowe $\hat{\mathcal{M}}^2$

Elementy macierzowe składników operatora  $\hat{\mathcal{M}}^2$ , zawierające odpowiednio  $T_{gg}$ ,  $H_{mass}$ ,  $H_{gg}^{fin}$ ,  $H_{high}$ ,  $H_{high}^{rest}$  i  $H_{low}$  oznaczmy przez  $I_0$ ,  $I_{mass}$ ,  $I_{fin}$ ,  $I_{high}$ ,  $I_{high}^{rest}$  i  $I_{low}$ . Dodatkowo przez  $I_I$  oznaczmy

$$I_I = I_{fin} + I_{high} + I_{high}^{rest} + I_{low}. \quad (\text{B.25})$$

### B.2.2 Energia kinetyczna

$$I_{0nj;n'j'}^{ss'} = N^2 g^2 \delta_{ss'} \int [x\kappa] R_n(w) R_{n'}(w) W_{j,jz}^s(\theta, \varphi) W_{j',jz}^s(\theta, \varphi) \mathcal{M}^2, \quad (\text{B.26})$$

gdzie  $\mathcal{M}^2 = \kappa^2/[x(1-x)]$ .  $I_0$  daje się policzyć analitycznie:

$$I_{0nj;n'j'}^{ss'} = \Lambda^2 \delta_{ss'} \delta_{jj'} [(2n+1)\delta_{nn'} - (n'+1)\delta_{n,n'+1} - (n+1)\delta_{n+1,n'}]. \quad (\text{B.27})$$

Jak widać przyjęta baza nie diagonalizuje energii kinetycznej, jednak nie stanowi to jakiegokolwiek przeszkody w analizie równania (3.41).

### B.2.3 Część masowa

$$I_{mass\ nj;n'j'}^{ss'} = N^2 g^2 \delta_{ss'} \times \int [x\kappa] R_n(w) R_{n'}(w) W_{j,jz}^s(\theta, \varphi) W_{j',jz}^s(\theta, \varphi) h_{mass}(x, \kappa^\perp). \quad (\text{B.28})$$

Wykonując całkowania po kątach dostajemy wyrażenie, które obliczamy numerycznie.

$$I_{mass\ nj;n'j'}^{ss'} = 2N_c \Lambda^2 \alpha_s \delta_{ss'} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^\infty dw \int_0^\infty dw' \times L_n(w) L_{n'}(w) \tilde{W}_{j,jz}^s(x) \tilde{W}_{j',jz}^s(x) e^{-w-2\Gamma w'} \left[ \frac{1-y}{y} + \frac{y}{1-y} + y(1-y) \right] \times \left[ \frac{\nu_{1-x,xy,x(1-y)}^2}{\mathcal{M}^2 + x\nu_{1-x,xy,x(1-y)}^2} + \frac{\nu_{x,(1-x)y,(1-x)(1-y)}^2}{\mathcal{M}^2 + (1-x)\nu_{x,(1-x)y,(1-x)(1-y)}^2} \right], \quad (\text{B.29})$$

gdzie

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}. \quad (\text{B.30})$$

Stała  $\Gamma$  pojawiająca się w powyższym wzorze jest w przypadku wyboru  $f_\lambda$  danym wzorem (2.39) jest równa

$$\Gamma = \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}. \quad (\text{B.31})$$

Elementy macierzowe liczą się bez problemów w użytych tu zmiennych.

### B.2.4 Część oddziaływania

Będziemy używać następujących oznaczeń (patrz również rys. 3.2).

$$x = x_1, \quad y = x_3, \quad (\text{B.32})$$

$$\kappa = \kappa_{12}, \quad \rho = \kappa_{34}, \quad (\text{B.33})$$

Element macierzowy  $I_{Inj;n'j'}^{ss'}$  dany jest przez 6-cio wymiarową całkę (po uwzględnieniu postaci wektorów polaryzacji gluonów w odpowiednich konfiguracjach polaryzacyjnych).

$$I_{Inj;n'j'}^{ss'} = N^2 g^2 \int [x\kappa][y\rho] \times R_n(w_l) R_{n'}(w_r) W_{j,j_z}^s(\theta_l, \varphi_l) W_{j',j_z}^{s'}(\theta_r, \varphi_r) h_{j_z}^{ss'}(x, \kappa^\perp; y, \rho^\perp). \quad (\text{B.34})$$

gdzie

$$h^{ss'} = h_{fin}^{ss'} + \delta_{ss'} (h_{high} + h_{high}^{rest} + h_{low}), \quad (\text{B.35})$$

Jak widać człony z  $h_{high}$ ,  $h_{high}^{rest}$  i  $h_{low}$  są diagonalne w wybranej bazie stanów polaryzacyjnych. Zewnętrzny czynnik kształtu (tzn. ten czynnik, który jest jawnie napisany w wzorze (2.32)), w użytych tu zmiennych, jest dany przez

$$f_\lambda = \exp[-\Gamma(\sqrt{w_l} - \sqrt{w_r})^2]. \quad (\text{B.36})$$

$$h_{fin}^{ss'} = \left( f_\lambda \tilde{\mathcal{F}}_{2\lambda} + \tilde{\mathcal{K}}_2 \right) \frac{w^{ss'}}{x(1-x)y(1-y)} \mp \delta_{ss'} f_\lambda, \quad (\text{B.37})$$

gdzie przed ostatnim członem dla  $s = \uparrow, \downarrow$  występuje znak  $-$ , natomiast dla  $s = +, -$  znak  $+$ . Wyrażenia z  $w^{ss'}$  pochodzą z tych części członów  $V_{\lambda gg}$  i  $V_{Rgg}$ , które zawierają  $v_{fin}$ , dane wzorem (3.29). Składnik proporcjonalny do czynnika  $f_\lambda$  bierze się z oddziaływania czteropunktowego gluonów  $W_{\lambda gg}$ . Oznaczmy  $\alpha^\perp = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\beta^\perp = (\beta_1, \beta_2)$  ( $\alpha^\perp$  i  $\beta^\perp$  są dane przez (3.30-3.31)).

$$w^{\uparrow\uparrow} = \frac{2i}{x-y} (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(2xy - x - y) - 2\alpha^\perp\beta^\perp, \quad (\text{B.38})$$

$$w^{\uparrow\downarrow} = 0, \quad (\text{B.39})$$

$$w^{\uparrow+} = -\sqrt{2}(\alpha_1 - i\alpha_2)(\beta_1 - i\beta_2)(1 - 2y + 2y^2), \quad (\text{B.40})$$

$$w^{\uparrow-} = \sqrt{2}(\alpha_1 - i\alpha_2)(\beta_1 - i\beta_2)(1 - 2y), \quad (\text{B.41})$$

$$w^{\downarrow\uparrow} = 0, \quad (\text{B.42})$$

$$w^{\downarrow\downarrow} = -\frac{2i}{x-y} (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)(2xy - x - y) - 2\alpha^\perp\beta^\perp, \quad (\text{B.43})$$

$$w^{\downarrow+} = -\sqrt{2}(\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)(1 - 2y + 2y^2), \quad (\text{B.44})$$

$$w^{\downarrow-} = -\sqrt{2}(\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)(1 - 2y), \quad (\text{B.45})$$

$$w^{+\uparrow} = -\sqrt{2}(\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)(1 - 2x + 2x^2), \quad (\text{B.46})$$

$$w^{+\downarrow} = -\sqrt{2}(\alpha_1 - i\alpha_2)(\beta_1 - i\beta_2)(1 - 2x + 2x^2), \quad (\text{B.47})$$

$$w^{++} = -2\alpha^\perp\beta^\perp(1 - 2x + 2x^2 - 2y + 2y^2), \quad (\text{B.48})$$

$$w^{+-} = -\frac{2i}{x-y}(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) \times (x - 2x^2 + 2x^3 + y - 2y^2 - 2xy + 4xy^2 - 2x^2y), \quad (\text{B.49})$$

$$w^{-\uparrow} = \sqrt{2}(\alpha_1 + i\alpha_2)(\beta_1 + i\beta_2)(1 - 2x), \quad (\text{B.50})$$

$$w^{-\downarrow} = -\sqrt{2}(\alpha_1 - i\alpha_2)(\beta_1 - i\beta_2)(1 - 2x), \quad (\text{B.51})$$

$$w^{-+} = -\frac{2i}{x-y}(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) \times (x - 2x^2 + y - 2y^2 + 2y^3 - 2xy - 2xy^2 + 4x^2y), \quad (\text{B.52})$$

$$w^{--} = -2\alpha^\perp\beta^\perp(1 - 2x)(1 - 2y). \quad (\text{B.53})$$

Natomiast,

$$h_{high} = \frac{1}{(x-y)^2} f_\lambda (ff - 1) \left[ 4\tilde{\mathcal{F}}_2 \alpha^\perp \beta^\perp - (x+y)(2-x-y) \right], \quad (\text{B.54})$$

$$h_{high}^{rest} = \frac{1}{(x-y)^2} (f_\lambda - 1) ff (x+y)(2-x-y), \quad (\text{B.55})$$

$$h_{low} = \frac{1}{(x-y)^2} ff \left[ 4\tilde{\mathcal{K}}_2 \alpha^\perp \beta^\perp + (x+y)(2-x-y) \right]. \quad (\text{B.56})$$

Korzystając z (B.19) i wprowadzając zmienną  $\gamma$ :

$$\gamma = \varphi_l - \varphi_r, \quad (\text{B.57})$$

można wykonać całkowanie po kącie  $\varphi_r$ . Do obliczenia numerycznego zostaje więc pięciowymiarowa całka,

$$I_{Inj;n'j'}^{ss'} = \frac{N_c \Lambda^2 \alpha_s}{\pi} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^\infty dw_l \int_0^\infty dw_r \theta(x-y) \times \exp\left[-\frac{w_l + w_r}{2}\right] L_n(w_l) L_{n'}(w_r) \tilde{W}_{j_z}^s(x) \tilde{W}_{j'_z}^{s'}(y) \tilde{h}_{j_z}^{ss'}(x, w_l; y, w_r; \gamma). \quad (\text{B.58})$$

$\tilde{h}_{j_z}^{ss'}$  to  $h_{j_z}^{ss'}$  odcałkowane po kącie  $\varphi_r$ , podobnie  $\tilde{w}_{j_z}^{ss'}$ .

$$\tilde{h}_{j_z}^{ss'} = \left( f_\lambda \tilde{\mathcal{F}}_{2\lambda} + \tilde{\mathcal{K}}_2 \right) \tilde{w}_{j_z}^{ss'} \mp \delta_{j_z 0} \delta_{ss'} f_\lambda - \delta_{ss'} (h_{high} + h_{high}^{rest} + h_{low}) \cos j_z \gamma, \quad (\text{B.59})$$



gdzie

$$\tilde{w}_{j_z}^{\uparrow\uparrow} = -2 [(w_l + w_r) \cos(j_z - 2)\gamma - r t \cos(j_z - 1)\gamma] , \quad (\text{B.60})$$

$$\tilde{w}_{j_z}^{\uparrow\downarrow} = 0 , \quad (\text{B.61})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{\uparrow+} &= -\sqrt{2}(1 - 2y + 2y^2) \\ &\times [w_l \cos j_z \gamma + w_r \cos(j_z - 2)\gamma - r t \cos(j_z - 1)\gamma] , \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{\uparrow-} &= \sqrt{2}(1 - 2y) \\ &\times [w_l \cos j_z \gamma + w_r \cos(j_z - 2)\gamma - r t \cos(j_z - 1)\gamma] , \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

$$\tilde{w}_{j_z}^{\downarrow\uparrow} = 0 , \quad (\text{B.64})$$

$$\tilde{w}_{j_z}^{\downarrow\downarrow} = -2 [(w_l + w_r) \cos(j_z + 2)\gamma - r t \cos(j_z + 1)\gamma] , \quad (\text{B.65})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{\downarrow+} &= -\sqrt{2}(1 - 2y + 2y^2) \\ &\times [w_l \cos j_z \gamma + w_r \cos(j_z + 2)\gamma - r t \cos(j_z + 1)\gamma] , \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{\downarrow-} &= -\sqrt{2}(1 - 2y) \\ &\times [w_l \cos j_z \gamma + w_r \cos(j_z + 2)\gamma - r t \cos(j_z + 1)\gamma] , \end{aligned} \quad (\text{B.67})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{+\uparrow} &= -\sqrt{2}(1 - 2x + 2x^2) \\ &\times [w_l \cos(j_z - 2)\gamma + w_r \cos j_z \gamma - r t \cos(j_z - 1)\gamma] , \end{aligned} \quad (\text{B.68})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{+\downarrow} &= -\sqrt{2}(1 - 2x + 2x^2) \\ &\times [w_l \cos(j_z + 2)\gamma + w_r \cos j_z \gamma - r t \cos(j_z + 1)\gamma] , \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{++} &= -2(1 - 2x + 2x^2 - 2y + 2y^2) \\ &\times [(w_l + w_r) - r t \cos \gamma] \cos j_z \gamma , \end{aligned} \quad (\text{B.70})$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{j_z}^{+-} &= -2(x - 2x^2 + 2x^3 + y - 2y^2 - 2xy + 4xy^2 - 2x^2y) \\ &\times t \sin j_z \gamma \sin \gamma , \end{aligned} \quad (\text{B.71})$$

gdzie

$$t = \sqrt{\frac{w_l w_r}{x(1-x)y(1-y)}} , \quad (\text{B.72})$$

$$r = x + y - 2xy , \quad (\text{B.73})$$

$$\alpha^\perp \beta^\perp = x(1-x)y(1-y)(w_l + w_r) - r \sqrt{x(1-x)y(1-y)w_l w_r} \cos \gamma . \quad (\text{B.74})$$

### Analiza członu $I_{high}$

Aby  $I_{high}$  poddało się procedurom całkowania numerycznego musimy je podzielić na odpowiednie składniki. Dokonajmy następującego podziału  $h_{high}$ .

$$h_{high} = h_1 + h_2 + h_3 , \quad (\text{B.75})$$

gdzie

$$h_1 = \frac{1}{z^2} f_\lambda (G - G_0) \frac{ff - 1}{D}, \quad (\text{B.76})$$

$$h_2 = \frac{1}{z^2} f_\lambda \left( \frac{ff - 1}{D} - \frac{ff_0 - 1}{D_0} \right) G_0, \quad (\text{B.77})$$

$$h_3 = \frac{1}{z^2} f_\lambda \frac{ff_0 - 1}{D_0} G_0, \quad (\text{B.78})$$

$$D = (1 - x)\alpha^{\perp 2} + y\beta^{\perp 2}, \quad (\text{B.79})$$

$$G = 4(1 - x)y(1 + x - y)\alpha^\perp \beta^\perp - (x + y)(2 - x - y)D, \quad (\text{B.80})$$

$$D_0 = \lim_{z \rightarrow 0} D = x(1 - x) (\rho^\perp - \kappa^\perp)^2, \quad (\text{B.81})$$

$$G_0 = \lim_{z \rightarrow 0} G = 2zx(1 - x)(1 - 2x) (\rho^{\perp 2} - \kappa^{\perp 2}), \quad (\text{B.82})$$

$$ff_0 = \lim_{z \rightarrow 0} ff = \exp \left[ -\Gamma \frac{(\rho^\perp - \kappa^\perp)^2}{z} \right]. \quad (\text{B.83})$$

Całki z  $h_i$  oznaczmy przez  $I_i$ . Mamy więc,

$$I_{high} = I_1 + I_2 + I_3. \quad (\text{B.84})$$

$I_1$  i  $I_2$  wykonują się bez problemów. Część  $I_3$  wymaga dodatkowej analizy.

$$I_{3nj;n'j'} = N^2 g^2 \int_0^\infty dw_l \int_0^\infty dw_r \int_0^{2\pi} d\gamma \exp \left( -\frac{w_l + w_r}{2} \right) L_n(w_l) L_{n'}(w_r) \cos(j_z \gamma) \tilde{I}_{3jj'}, \quad (\text{B.85})$$

gdzie

$$\tilde{I}_{3jj'} = \int_0^1 dx \int_0^x dz \tilde{W}_{j,j_z}^s(x) \tilde{W}_{j',j_z}^s(y) h_3. \quad (\text{B.86})$$

Przekształcimy  $\tilde{I}_{3jj'}$  następująco. Ponieważ pozorne osobliwości zlokalizowane są w obszarze małego  $z$  to  $\tilde{I}_{3jj'}$  przekształcimy następująco,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{3jj'} = & \int_0^1 dx \int_0^x dz h_3 \tilde{W}_{j,j_z}^s(x) \left[ \tilde{W}_{j',j_z}^s(x - z) - \tilde{W}_{j',j_z}^s(x) \right] \\ & + \int_0^1 dx \int_0^x dz h_3 \tilde{W}_{j,j_z}^s(x) \tilde{W}_{j',j_z}^s(x). \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

Pierwszą z tych całek oznaczmy przez  $\tilde{I}_{3a}$ , a drugą przez  $\tilde{I}_{3b}$ .  $\tilde{I}_{3a}$  nie sprawia już żadnych trudności.  $\tilde{I}_{3b}$  obliczymy zgodnie z pomysłem przedstawionym pod wzorem (3.64), zapiszemy więc,

$$\tilde{I}_{3b} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[ \int_0^x dz h_3^+ + \int_{-1+x}^0 dz h_3^- \right] \tilde{W}_{j,jz}^s(x) \tilde{W}_{j',jz}^s(x), \quad (\text{B.88})$$

gdzie  $h_3^+ = h_3$ , natomiast  $h_3^- = h_3(1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4)$  odpowiada konfiguracji dla przypadku, gdzie  $x_3 > x_1$ . Korzystając ze wzorów (3.61-3.64) możemy usunąć rozbieżność w  $z$  z  $\tilde{I}_{3b}$  w sensie wartości głównej. Ostatecznie otrzymujemy

$$\tilde{I}_{3b} = \int_0^1 dx \int_{x_-}^{x_+} dz \tilde{W}_{j,jz}^s(x) \tilde{W}_{j',jz}^s(x) \frac{1}{z} f_\lambda (ff_0 - 1) \frac{\rho^{\perp 2} - \kappa^{\perp 2}}{(\rho^{\perp} - \kappa^{\perp})^2}, \quad (\text{B.89})$$

gdzie dla  $x < 1/2$   $x_- = x$ , a  $x_+ = 1 - x$ , a dla  $x > 1/2$  mamy  $x_- = 1 - x$ , a  $x_+ = x$ . Tak przekształcone  $\tilde{I}_{3b}$  liczy się już bez problemów.

### Zmienne całkowania numerycznego

Ze względu na obecność osobliwych wyrażeń w  $H_{gg}^{div}$  do obliczenia elementów macierzowych użyjemy następujących zmiennych  $(u, v, x, z, \xi)$ :

$$z = x - y, \quad (\text{B.90})$$

$$w_l = u + 2\sqrt{zuv} \cos \xi + zv, \quad (\text{B.91})$$

$$w_r = u - 2\sqrt{zuv} \cos \xi + zv, \quad (\text{B.92})$$

$$\cos \gamma = \frac{u - zv}{\sqrt{w_l w_r}}. \quad (\text{B.93})$$

Jacobian zamiany zmiennych daje czynnik  $4z$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^\infty dw_l \int_0^\infty dw_r \int_0^{2\pi} d\gamma \theta(x - y) \\ & = 4 \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^{2\pi} d\xi z. \end{aligned} \quad (\text{B.94})$$

Zmienne te wykorzystujemy do obliczenia wszystkich składników  $I_I$  oprócz  $I_{3b}$ , które obliczamy w zmiennych  $(w_l, w_r, x, z, \gamma)$ .

### B.2.5 Dowód zbieżności $I_{high}^{rest}$

Zależności (B.91) i (B.92) powodują, że wystarczy rozważyć przypadek gdy  $R_n(z_l) = R_{n'}(z_r) = 1$  oraz  $\tilde{W}_{j,jz}^s(x) = \tilde{W}_{j',jz}^s(y) = 1$ . Funkcja podcałkowa w

wyrażeniu na  $I_{high}^{rest}$  dla małych  $z$  wynosi, patrz wzór (3.59),

$$\frac{1}{z} \exp(-u - 4v) [\exp(-4zv \cos^2 \xi) - 1] . \quad (\text{B.95})$$

Za sprawą nowych zmiennych w mianowniku stoi pierwsza potęga  $z$ , a nie druga. Czynniki  $\exp(-u)$  pochodzi z definicji bazy, a w szczególności ze wzoru (B.14), natomiast czynniki  $\exp(-4v)$  to  $ff$  w granicy  $z \rightarrow 0$ . Wyrażenie w nawiasie kwadratowym pochodzi od  $(f_\lambda - 1)$ . Jedyne możliwe źródło potencjalnych rozbieżności tkwi w zachowaniu się tej funkcji jako funkcji  $z$ . Dla małych  $z$ , wyrażenie w nawiasie można zastąpić przez czynniki  $-4zv \cos^2 \xi$ , który kompensuje istnienie  $z$  w mianowniku. Dowodzi to skończoności  $I_{high}^{rest}$ .

W obliczeniach numerycznych nie korzystamy z zaprezentowanej tu granicznej postaci  $I_{high}^{rest}$ . Skoro wiadomo, że zarówno  $I_{low}$  jak i  $I_{high}^{rest}$  są skończone to obliczamy sumę tych wyrażeń, nie sprawia ona bowiem żadnych kłopotów w zaprezentowanych tu zmiennych.

## Dodatek C

### Baza swobodnego momentu pędu

Oznaczmy,  $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{QCDg}(g = 0)$ .

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}Tr(f^{\mu\nu}f_{\mu\nu}), \quad (C.1)$$

gdzie

$$f^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (C.2)$$

Ze względu na wektorowy charakter pól  $A^\mu$  wyrażenie (2.7) musi być zmodyfikowane o dodatkowy człon [35].

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \int d^2x^\perp dx^- : (x^\mu \mathcal{T}^{+\nu} - x^\nu \mathcal{T}^{+\mu} + \pi^\rho \Sigma_{\rho\sigma}^{\mu\nu} A^\sigma) \Big|_{x^+=0} :, \quad (C.3)$$

gdzie

$$\Sigma_{\rho\sigma}^{\mu\nu} = \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu. \quad (C.4)$$

$\pi^\rho$  to pęd kanoniczny sprzężony do  $A^\rho$ ,

$$\pi^\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_+ A_\rho}. \quad (C.5)$$

Wybieramy cechowanie  $A^+ = 0$  i wykorzystując  $A^- = 2(\partial^\perp A^\perp)/\partial^+$  eliminujemy składowe  $A^-$ . Następnie wykorzystując rozkład (3.9) i postać wektorów polaryzacji  $\varepsilon_{p\sigma}^\perp$  daną przez (A.10-A.11) dostajemy:

$$M^{+1} = i \sum_{\sigma c} \int [p] p^+ \frac{\partial a_{p\sigma c}^\dagger}{\partial p^1} a_{p\sigma c}, \quad (C.6)$$

$$M^{+2} = i \sum_{\sigma c} \int [p] p^+ \frac{\partial a_{p\sigma c}^\dagger}{\partial p^2} a_{p\sigma c}, \quad (C.7)$$

$$M^{12} = i \sum_{\sigma c} \int [p] \left[ \left( p^1 \frac{\partial}{\partial p^2} - p^2 \frac{\partial}{\partial p^1} \right) a_{p\sigma c}^\dagger \right] a_{p\sigma c} - \int [p] \left( a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} - a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} \right), \quad (\text{C.8})$$

$$M^{-1} = i \sum_{\sigma c} \int [p] \left[ \left( \frac{p^{\perp 2}}{p^+} \frac{\partial}{\partial p^1} + 2p^1 \frac{\partial}{\partial p^+} \right) a_{p\sigma c}^\dagger \right] a_{p\sigma c} + 2 \int [p] \frac{p^2}{p^+} \left( a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} - a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} \right), \quad (\text{C.9})$$

$$M^{-2} = i \sum_{\sigma c} \int [p] \left[ \left( \frac{p^{\perp 2}}{p^+} \frac{\partial}{\partial p^2} + 2p^2 \frac{\partial}{\partial p^+} \right) a_{p\sigma c}^\dagger \right] a_{p\sigma c} - 2 \int [p] \frac{p^1}{p^+} \left( a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} - a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} \right). \quad (\text{C.10})$$

Operator swobodnego momentu pędu wiąże się z generatorami  $M^{\mu\nu}$  następująco:

$$\vec{J} = \left[ \frac{1}{2}(M^{-2} - M^{+2}), -\frac{1}{2}(M^{-1} - M^{+1}), M^{12} \right]. \quad (\text{C.11})$$

Do wyrażenia  $\vec{J}$  wygodnie jest użyć zmiennych  $\vec{p}$  zamiast  $(p^+, p^\perp)$ ,  $[p] = d^3\vec{p}/(16\pi^3|\vec{p}|)$ .

$$J_1 = i \sum_{\sigma c} \int [p] \left[ \left( p^2 \frac{\partial}{\partial p^3} - p^3 \frac{\partial}{\partial p^2} \right) a_{p\sigma c}^\dagger \right] a_{p\sigma c} - \int [p] \frac{p^1 |\vec{p}|}{p^{\perp 2}} \left( a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} - a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} \right), \quad (\text{C.12})$$

$$J_2 = i \sum_{\sigma c} \int [p] \left[ \left( p^3 \frac{\partial}{\partial p^1} - p^1 \frac{\partial}{\partial p^3} \right) a_{p\sigma c}^\dagger \right] a_{p\sigma c} - \int [p] \frac{p^2 |\vec{p}|}{p^{\perp 2}} \left( a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} - a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} \right), \quad (\text{C.13})$$

$$J_3 = i \sum_{\sigma c} \int [p] \left[ \left( p^1 \frac{\partial}{\partial p^2} - p^2 \frac{\partial}{\partial p^1} \right) a_{p\sigma c}^\dagger \right] a_{p\sigma c} - \int [p] \left( a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} - a_{p\circ c}^\dagger a_{p\circ c} \right), \quad (\text{C.14})$$

## C.1 Stany własne $\vec{J}_0^2$

Znajdziemy teraz stany własne operatora  $\vec{J}_0^2$

$$\vec{J}_0^2|\Psi\rangle = j(j+1)|\Psi\rangle, \quad (\text{C.15})$$

w podprzestrzeni dwucząstkowej. Stan  $|\Psi\rangle$  wybierzemy w ten sposób, by był jednocześnie stanem własnym operatora  $J_3$ ,

$$J_3|\Psi\rangle = j_z|\Psi\rangle. \quad (\text{C.16})$$

Wyrazimy  $|\Psi\rangle$  korzystając z bazy stanów polaryzacyjnych zdefiniowanej w (B.4-B.7). W środku masy układu dwóch gluonów mamy

$$|\Psi\rangle_s = \int [12]\Psi(12)|p_1p_2, s\rangle. \quad (\text{C.17})$$

Stan  $|\Psi\rangle_s$  niesie pęd całkowity  $P^\perp = 0^\perp$ ,  $P^+ = \mathcal{M}$ , ( $\mathcal{M} = \sqrt{\kappa^2/[x(1-x)]}$ ), co odpowiada  $\vec{P} = \vec{0}$  w przypadku równoczesnym, tak więc

$$\Psi(12) = P^+ 16\pi^3 \delta(P^+ - \mathcal{M}) \delta^2(P^\perp) \phi(\kappa^\perp, x). \quad (\text{C.18})$$

Korzystając ze zmiennych (B.9-B.10) możemy przedstawić funkcję  $\phi(\kappa^\perp, x)$  jako iloczyn funkcji zależnej tylko od  $|\vec{k}|$  i drugiej zależnej tylko od kątów  $\theta, \varphi$ ,

$$\phi(\kappa^\perp, x) = R(|\vec{k}|)W(\theta, \varphi). \quad (\text{C.19})$$

**Przypadek**  $s = \uparrow, \downarrow$

$$\vec{J}_0^2|\Psi\rangle = \int [12]P^+ 2(2\pi)^3 \delta(P^+ - \mathcal{M}) \delta^2(P^\perp) \left[ \vec{S}^2 \phi(\kappa^\perp, x) \right] |s\rangle, \quad (\text{C.20})$$

$$J_3|\Psi\rangle = \int [12]P^+ 2(2\pi)^3 \delta(P^+ - \mathcal{M}) \delta^2(P^\perp) \times \left[ \left( -i \frac{\partial}{\partial \varphi} + s_z \right) \phi(\kappa^\perp, x) \right] |s\rangle, \quad (\text{C.21})$$

gdzie

$$\vec{S}^2 = -\partial_{\theta\theta}^2 - \cot \theta \partial_\theta - \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi\varphi}^2. \quad (\text{C.22})$$

$s_z = -2$  dla  $\uparrow$  oraz  $s_z = 2$  dla  $\downarrow$ , co wynika ze wzoru (C.14). Jak widać  $\vec{S}^2$  to operator różniczkowy reprezentujący „zwykły” moment pędu. Równania (C.15) i (C.16) sprowadzają się więc do

$$\vec{S}^2 W_{jj_z}^s(\theta, \varphi) = j(j+1)W_{jj_z}^s(\theta, \varphi), \quad (\text{C.23})$$

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial\varphi} + s_z\right) W_{jj_z}^s(\theta, \varphi) = j_z W_{jj_z}^s(\theta, \varphi). \quad (\text{C.24})$$

Tak więc dla  $s = \uparrow, \downarrow$  otrzymujemy rozwiązania w postaci harmonik sferycznych

$$W_{jj_z}(\theta, \varphi) = Y_{jm}(\theta, \varphi), \quad (\text{C.25})$$

gdzie możliwe wartości to  $j = 0, 2, 4, \dots$  oraz  $m = -j, \dots, j$ , natomiast  $j_z = m + s_z$ . Parzystość  $j$  wynika z tego, że  $\Psi(12) = \Psi(21)$  dla stanów z  $s = \uparrow, \downarrow$ .

### Przypadek $s = +, -$

W tym przypadku otrzymujemy,

$$\begin{aligned} \vec{J}^2|\Psi\rangle_{\pm} = & \int [12]P^+2(2\pi)^3\delta(P^+ - \mathcal{M})\delta^2(P^\perp) \\ & \times \left[ \vec{S}^2\phi|\pm\rangle + \frac{4}{\sin^2\theta}\phi|\pm\rangle - 4i\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi|\mp\rangle \right], \quad (\text{C.26}) \end{aligned}$$

$$J_3|\Psi\rangle_{\pm} = \int [12]P^+2(2\pi)^3\delta(P^+ - \mathcal{M})\delta^2(P^\perp) \left[ -i\frac{\partial}{\partial\varphi}\phi(\kappa^\perp, x) \right] |\pm\rangle, \quad (\text{C.27})$$

Wzór (C.26) oznacza, że w przypadku gdy  $J_3|\Psi\rangle \neq 0$  to stan z  $s = +$  lub  $s = -$  nie może być stanem własnym  $\vec{J}_0^2$ . Stanem własnym może być tylko ich kombinacja liniowa. Dla  $J_3|\Psi\rangle = 0$ , można znaleźć rozwiązanie. Równanie różniczkowe jakie musi w tym wypadku spełniać  $W_{jj_z}^s(\theta, \varphi)$ , to

$$\left( \vec{S}^2 + \frac{4}{\sin^2\theta} \right) W_{j0}^s(\hat{k}) = j(j+1)W_{j0}^s(\hat{k}). \quad (\text{C.28})$$

Rozwiązaniami są stowarzyszone wielomiany Legendre’a  $P_j^2(\cos\theta)$  dla  $j \geq 2$ , dla  $j < 2$  równanie (C.28) nie posiada normowalnych rozwiązań. Ponieważ  $\Psi(12)$  jest funkcją parzystą przy zamianie  $1 \leftrightarrow 2$  w (C.17), a  $\Psi(12)$  nieparzystą, więc dla  $s = +$  dopuszczalne są parzyste wartości  $j$ , a dla  $s = -$  nieparzyste.

W celu znalezienia rozwiązań w przypadku  $J_3|\Psi\rangle \neq 0$  posłużymy się operatorami drabinkowymi,

$$J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2. \quad (\text{C.29})$$



Ich działanie na stan  $|\Psi\rangle_{\pm}$ , gdy  $J_3|\Psi\rangle_{\pm} \neq 0$ , jest następujące

$$J_{\pm}|\Psi\rangle_{\pm} = \int [12] [S_{\pm}\Psi(12)|\pm\rangle + A_{\pm}\Psi(12)|\mp\rangle] , \quad (\text{C.30})$$

gdzie

$$S_{\pm} = \pm e^{\pm i\varphi} \partial_{\theta} + i e^{\pm i\varphi} \cot \theta \partial_{\varphi} , \quad (\text{C.31})$$

$$A_{\pm} = -2i \frac{e^{\pm i\varphi}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (\text{C.32})$$

Działając  $J_{\pm}$  można generować pozostałe rozwiązania na  $W_{jj_z}^s(\theta, \varphi)$ . Oznaczmy przez  $|\Psi_{j,j_z}\rangle$  stan o ustalonym  $j$  i  $j_z$  wówczas

$$\begin{aligned} |\Psi_{j,\pm|j_z}\rangle_{\pm} &= (J_{\pm})^{|j_z|} |\Psi_{j,0}\rangle_{\pm} \\ &= \int [12] P^+ 2(2\pi)^3 \delta(P^+ - P_{12}^+) \delta(P^{\perp} - P_{12}^{\perp}) R(|\vec{k}|) [W_{jj_z}^+ |+\rangle + W_{jj_z}^- |-\rangle] . \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Przykład:

$$\begin{aligned} j=2, m=0 : W^+ &= \sin^2 \theta, & W^- &= 0 , \\ j=2, m=1 : W^+ &= 2e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta, & W^- &= -2e^{i\varphi} \sin \theta , \\ j=2, m=2 : W^+ &= 2e^{2i\varphi} (1 + \cos^2 \theta), & W^- &= -4e^{2i\varphi} \cos \theta . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j=3, m=0 : W^+ &= 0, & W^- &= \cos \theta \sin^2 \theta . \\ j=3, m=1 : W^+ &= -2e^{i\varphi} \sin \theta \cos \theta , & W^- &= e^{i\varphi} \sin \theta (1 + 3 \cos 2\theta) / 2 , \\ j=3, m=2 : W^+ &= -4e^{2i\varphi} \cos 2\theta , & W^- &= 2e^{2i\varphi} \cos \theta (\cos^2 \theta + \cos 2\theta) , \\ j=3, m=3 : W^+ &= 6e^{3i\varphi} \sin 2\theta, & W^- &= -6e^{3i\varphi} \sin \theta (1 + \cos^2 \theta) . \end{aligned}$$

Oczywiście,

$$(J_{\pm})^3 |\Psi_{2,0}\rangle_s = 0 , \quad (\text{C.34})$$

$$(J_{\pm})^4 |\Psi_{3,0}\rangle_s = 0 , \quad (\text{C.35})$$

dla  $s = +$  lub  $s = -$ .

Po unormowaniu stanów  $|\Psi_{j,j_z}\rangle$  używamy ich jako alternatywnej bazy do harmonik sferycznych.

# Bibliografia

- [1] H. Fritzsche and M. Gell-Mann, Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics, Chicago, 1972, Vol. 2, p. 135, ed. by J.D. Jackson, A. Roberts.
- [2] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [3] H. D. Politzer, Phys.Rev.Lett. **30**, 1346 (1973).
- [4] R. P. Feynman, M. Kislinger, F. Ravndal, Phys. Rev. D **3**, 2706 (1971).
- [5] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. D **9**, 3471 (1974); A. Chodos, R. L. Jaffe, C. B. Thorn, Phys. Rev. D **10**, 2599 (1974).
- [6] H. J. Lipkin, Phys. Rep. **8**, 173 (1973).
- [7] T. H. R. Skyrme, Proc. Royal Soc. A **260**, 127 (1961).
- [8] R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415 (1969).
- [9] St. D. Głazek, K. G. Wilson, Phys. Rev. D **48**, 5863 (1993); St. D. Głazek, K. G. Wilson, Phys. Rev. D **49**, 4214 (1994).
- [10] St. D. Głazek, Acta Phys. Pol. B **29**, 1979 (1998).
- [11] H. J. Melosh, Phys. Rev. D **9**, 1095 (1974).
- [12] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [13] J. B. Kogut and D. E. Soper, Phys. Rev. D **1**, 2901 (1970).
- [14] S.-J. Chang, R. G. Root and T.-M. Yan, Phys. Rev. D **7**, 1133 (1973).
- [15] K. G. Wilson et al., Phys. Rev. D **49**, 6720 (1994).
- [16] St. D. Głazek, Phys. Rev. D **69**, 065002 (2004).

- 
- [17] H. Leutwyler, J. Stern, *Ann. Phys.* **112**, 94 (1978).
- [18] St. D. Glazek and T. Masłowski, *Phys. Rev. D* **65**, 065011 (2002).
- [19] S. Eidelman et al., *Phys. Lett.* **B**, 1 (2004).
- [20] St. D. Glazek and J. Młynik, *Acta Phys. Pol. B* **35**, 723 (2003).
- [21] St. D. Glazek, *Phys. Rev. D* **63**, 116006 (2001).
- [22] St. D. Glazek, K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **67**, 045001 (2003).
- [23] St. D. Glazek and J. Młynik, *Phys. Rev. D* **67**, 045001 (2003).
- [24] C. Amsler, F. E. Close, *Phys. Rev. D* **53**, 295 (1996); C. Amsler, F. E. Close, *Phys. Lett.* **353**, 385 (1995).
- [25] F. E. Close and A. Kirk, *Phys. Lett.* **483**, 345 (2000).
- [26] BES Collaboration, X. Shen, hep-ex/0209031.
- [27] W. Lee, D. Weingarten, *Phys. Rev. D* **61**, 014015 (2000).
- [28] B. H. Allen, R. J. Perry, *Phys. Rev. D* **62**, 025005 (2000).
- [29] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **2**, 1438 (1970).
- [30] C. J. Morningstar, M. J. Peardon, *Phys. Rev. D* **60**, 034509 (1999).
- [31] K. G. Wilson, *Nucl. Proc. Suppl.* **140**, 3 (2005).
- [32] S. A. Larin, T. van Ritbergen, and J. A. M. Vermaseren, *Phys. Lett. B* **400**, 379 (1997).
- [33] K. G. Chetyrkin, B. A. Kniehl and M. Steinhauser, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2184 (1997).
- [34] G. P. Lepage, CLNS-80/447, Mar 1980.
- [35] J.D. Bjorken, S.D. Drell, „Relatywistyczna mechanika kwantowa”, PWN, Warszawa, 1985.