1. Sprawdzić czy poniższe przestrzenie spełniają definicję przestrzeni liniowych:

   (a) Zbiór $\mathbf{R}^3$ z dodawaniem: $(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ oraz mnożeniem przez liczbę: $k(x,y,z)=(kx,y,z)$

   (b) Zbiór $\mathbf{R}^2$ z dodawaniem: $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ oraz mnożeniem przez liczbę: $k(x,y)=(2kx,2ky)$.

   (c) Zbiór macierzy postaci $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbf{R}$ ze standardowym dodawaniem i mnożeniem przez liczbę.

2. Sprawdzić liniową niezależność wektorów:

   (a) (2,-1,4), (3,6,2), (2,10,-4),

   (b) (6,0,-1), (1,1,4),

   (c) (1,3,3), (0,1,4), (5,6,3), (7,2,-1).

3. Czy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ z działaniami $\bigoplus$ oraz $\otimes$ zdefiniowanymi :

   (a) $x\bigoplus y\equiv 2x+2y \quad \alpha\bigotimes x=\alpha x$,

   (b) $x\bigoplus y\equiv 2x+y \quad \alpha\bigotimes x=\alpha x$ jest przestrzenią wektorową?

4. Wykazać, że jeśli w grupie $\mathbf{R}^2$ z dodawaniem po współrzednych określimy mnożenie przez skalar:$\lambda(x,y)\equiv(\lambda x,y)$, to spełnione są wszystkie aksjomaty przestrzeni liniowej oprócz jednego.

5. Sprawdzić czy poniższe wektory zaczepione w początku układu współrzędnych leżą w jednej płaszczyźnie: $\mathbf{v_1}=(3,-6,9)$, $\mathbf{v_2}=(2,-4,6)$, $\mathbf{v_3}=(1,1,1)$.

6. Który z podzbiorów w $\mathbf{R}^5$ jest jej podprzestrzenią:

   (a) $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5): x_1+x_2=0, x_3+x_4=0, x_3+4x_4-x_5=1\}$,

   (b) $A=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5): x_1-x_2=0, x_2+3x_3-x_4=0\}$.

7. Zbadać, czy wektory $(3\sqrt{2},3)$ oraz $(2,\sqrt{2})$ są liniowo zależne w przestrzeniach:

(a) $\mathbf{R}^2$ nad $\mathbf{R}$,

(b) $\mathbf{R}^2$ nad $\mathbf{Q}$.

8. W przestrzeni funkcji ciągłych nad $\mathbf{R}$ pokazać, że są liniowo zależne wektory:

   (a) $f = \exp(x), g = 3\exp(x)$,

   (b) $f = \sin^2(x), g = \cos^2(x), h = 5$.

9. W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ dane są cztery wektory: $(1,2,3,1)$, $(0,3,-1,2)$, $(1,0,3,-4)$, $(2,5,a,-1)$. Znaleźć takie a, aby wektory te były liniowo niezależne. Udowodnić, że w $\mathbf{R}^3$ dowolne cztery wektory muszą być liniowo zależne.

10. Niech $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ baza w V oraz $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}$, $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}$, $\mathbf{u_3} = \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}$. Czy $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ jest bazą w V?

11. Sprawdzić czy podane wektory stanowią bazę w $\mathbf{R}^3$ i przedstawić wektor $\mathbf{x}$ w tej bazie.

    (a) $\mathbf{e_1} = (1,1,1), \mathbf{e_2} = (1,1,2), \mathbf{e_3} = (1,2,3)$ oraz $\mathbf{x} = (6,9,14)$,

    (b) $\mathbf{e_1} = (1,2,1), \mathbf{e_2} = (2,3,3), \mathbf{e_3} = (3,7,1)$ oraz $\mathbf{x} = (7,14,-1)$.

12. Niech $\mathbf{a} = (1,3,2)$. Dla jakiej wartości α wektory $\mathbf{x}$ spełniające równanie $(\mathbf{a}|\mathbf{x}) = \alpha$ tworzą podprzestrzeń w $\mathbf{R}^3$. Określić wymiar tej podprzestrzeni.

13. Pokazać, że suma kwadratów przekątnych równoległoboku jest równa sumie kwadratów boków tego równoległoboku.

14. Dane są wektory $\mathbf{x} = \mathbf{v_1} - 2\mathbf{v_2} + 3\mathbf{v_3}$ oraz $\mathbf{y} = -4\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3}$ gdzie $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ – baza ortonormalna. Obliczyć kąt między tymi wektorami.

15. Dopełnić do bazy ortonormalnej w $\mathbf{R}^n$:

    (a) $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$,

    (b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

16. Pokazać, że zbiór macierzy 2×2 o zerowych diagonalach stanowi podprzestrzeń w przestrzeni $\mathrm{M}_{2\times 2}$ macierzy 2×2.

17. Przedstawić poniższe wielomiany w postaci kombinacji liniowych wielomianów bazowych: $\mathbf{w_1} = 2+x+4x^2$, $\mathbf{w_2} = 1-x+3x^2$, $\mathbf{w_3} = 3+2x+5x^2$:

    (a) $2 + 6x^2$,

    (b) $2 + 2x + 3x^2$,

    (c) $5 + 9x + 5x^2$.

18. Wyznaczyć wymiar następujących przestrzeni: $x_i \in \mathbf{R}$

    (a) $V = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -2x_2, x_3 = x_2$,

    (b) $V = (x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

19. Metodą Grama-Schmidta zortogonalizować bazę:

    $\mathbf{f_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{f_2} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{f_3} = (1, 1, 1)$.