1. W poniższych przykładach podać macierz odwzorowania liniowego $\mathcal{A}\mathbf{W} \to \mathbf{V}$ w bazach $\{\mathbf{w}_i\}_{i=1\ldots k}$ w przestrzeni $\mathbf{W}$ i $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1\ldots n}$ w przestrzeni $\mathbf{V}$ oraz zbadać, czy dany wektor $\mathbf{v}$ należy do obrazu $\mathcal{A}(\mathbf{W})$

   (a) $n = 3$, $k = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \\ \\ \mathbf{v} &= 4\mathbf{v}_1 - 7\mathbf{v}_2 - 4\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

   (b) $n = 4$, $k = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4 \\ \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 8\mathbf{v}_3 + 7\mathbf{v}_4 \end{aligned}$$

   (c) $n = 5$, $k = 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_5 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_3 &= -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_5 \\ \\ \mathbf{v} &= 7\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 + 5\mathbf{v}_5 \end{aligned}$$

   (d) $n = 5$, $k = 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_5 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_2 &= 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4 - 3\mathbf{v}_5 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_3 &= -2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 \\ \\ \mathbf{v} &= -9\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3 - 7\mathbf{v}_4 + 8\mathbf{v}_5 \end{aligned}$$

   (e) $n = 5$, $k = 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4 + \mathbf{v}_5 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_2 &= 3\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \\ \mathcal{A}\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 - 3\mathbf{v}_4 + 2\mathbf{v}_5 \\ \\ \mathbf{v} &= -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - 7\mathbf{v}_3 + 5\mathbf{v}_4 - 8\mathbf{v}_5 \end{aligned}$$

2. Niech $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ – rzut prostopadły na płaszczyznę rozpiętą przez wektory $(1, -1, 1)$ i $(1, 3, 0)$. Podać macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej.

3. Podać macierz odwzorowania $M : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ polegającego na odbiciu lustrzanym punktów względem płaszczyzny $x + 2y - z = 0$ w bazie kanonicznej.

4. Niech $\mathbf{W}_2$ i $\mathbf{W}_4$ oznaczają przestrzeń wielomianów odpowiednio stopnia co najwyżej 2 i 4. Zbadać czy odwzorowanie $T : \mathbf{W}_2 \to \mathbf{W}_4$ dane przez $T(p(x)) = (x^2 + x + 1)p(x)$ jest liniowe i podać jego macierz w bazach kanonicznych.

5. Wyrazić operator różniczkowania w bazie $\bar{p}_1 = 2$, $\bar{p}_2 = 2 - 3x$, $\bar{p}_3 = 2 - 3x + 8x^2$. Obliczyć rząd tej macierzy oraz znaleźć jądro odwzorowania.

6. Dane jest odwzorowanie liniowe $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć jądro tego odwzorowania, znaleźć bazę w $\ker T$ oraz w obrazie $T(\mathbf{R}^4)$. Podać wymiary tych przestrzeni.

7. Dane jest odwzorowanie (w bazie kanonicznej):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Podać macierz tego odwzorowania w bazie $\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$, $\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$.

8. Dane są bazy w $\mathbf{R}^3$
$B = \{\mathbf{v_1} = (1, 0, 0), \mathbf{v_2} = (2, 2, 0), \mathbf{v_3} = (3, 3, 3)\}$
$B' = \{\mathbf{v_1'} = (1, 2, 3), \mathbf{v_2'} = (-4, 5, 6), \mathbf{v_3'} = (7, -8, 9)\}$.
Znaleźć macierz transformacji z bazy B' do bazy B oraz wyznaczyć współrzędne wektora $\mathbf{v} = (2, -1, 3)$ w obu bazach metodą transformacji współrzędnych. Sprawdzić wynik bezpośrednim rachunkiem.

9. Ortogonalny układ współrzędnych (x', y', z') powstał w wyniku obrócenia układu (x, y, z) o kąt $3\pi/4$ wokół osi y.

   (a) Wyznaczyć współrzędne (x', y', z') punktu P, którego współrzędne w układzie (x, y, z) są równe $(-2, 6, 3)$.

(b) Wyznaczyć współrzędne (x, y, z) punktu Q, którego współrzędne w układzie (x', y', z') są równe $(1, 3, 0)$.

10. Sprawdzić czy macierze są ortogonalne i obliczyć macierze odwrotne

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -2 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

11. Podać macierz odwzorowania $M : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ polegającego na odbiciu lustrzanym punktów względem płaszczyzny $3x - y - 4z = 0$ w bazie kanonicznej.

12. Odwzorowanie $\mathbf{T_n}$ zdefiniowane jest jako iloczyn wektorowy przez ustalony wektor $\mathbf{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$: $\mathbf{v} \mapsto T_{\mathbf{n}}\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{v}$. Podać macierz tego odwzorowania (w bazie kanonicznej)

13. Podać jądro odwzorowania liniowego $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$ danego monożeniem przez macierz:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć bazę w $\ker T$ oraz w obrazie $T(\mathbf{R}^4)$. Podać wymiary tych przestrzeni.

14. Dane są bazy w $\mathbf{R}^3$
$B = \{\mathbf{v_1} = (-3, 0, -3), \mathbf{v_2} = (-3, 2, -1), \mathbf{v_3} = (1, 6, -1)\}$
$B' = \{\mathbf{v'_1} = (-6, -6, 0), \mathbf{v'_2} = (-2, -6, 4), \mathbf{v'_3} = (-2, -3, 7)\}$.
Znaleźć macierz transformacji z bazy B do bazy B' oraz wyznaczyć współrzędne wektora $\mathbf{w} = (-5, 8, -5)$ w obu bazach metodą transformacji współrzędnych. Sprawdzić wynik bezpośrednim rachunkiem.

15. Dane jest odwzorowanie przestrzeni wielomianów stopnia trzeciego $\mathbf{W}_3$ w $\mathbf{R}^3$:

$$\mathbf{W}_3 \ni w(x) \mapsto \begin{pmatrix} w(-1) \\ w(0) \\ w(1) \end{pmatrix}$$

gdzie $w(a)$, $a = -1, 0, 1$ oznacza wartość wielomianu w punkcie a. Sprawdzić czy jest to odwzorowanie liniowe. Jeśli tak, to podać jego macierz w bazie:

$$\{1, 1-x, 2-4x+x^2, 6-18x+9x^2-x^3\}$$

w $\mathbf{W}_3$ i w bazie kanonicznej w $\mathbf{R}^3$

16. Dane jest odwzorowanie przestrzeni wielomianów stopnia drugiego w przestrzeń wielomianów stopnia trzeciego $\mathcal{A} : \mathbf{W}_2 \to \mathbf{W}_3$ zdefiniowane następująco:

$$\mathcal{A}w(x) = (x+1)w(x).$$

Który w poniższych wielomianów z $\mathbf{W}_3$ należy do obrazu $\mathcal{A}(\mathbf{W}_2)$:

(a) $x^2 + 1$,

(b) $x^3 + x^2 + x + 1$,

(c) $x^2 - 1$,

(d) $x^3 + 2x + x^2 + 2$?

Wyznaczyć jądro tego odwzorowania.