1. Która z podanych macierzy jest

   (a) ortogonalna,

   (b) unitarna,

   (c) symetryczna,

   (d) hermitowska?

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3\,\mathrm{i} & 4\,\mathrm{i} & -6-2\,\mathrm{i} \\ -4\,\mathrm{i} & 4-3\,\mathrm{i} & -2-6\,\mathrm{i} \\ 6+2\,\mathrm{i} & -2-6\,\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 17 & -8 & a+4 \\ -8 & 17 & -4 \\ a+4 & -4 & 11 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} & (1+\mathrm{i})^{-2} \\ \mathrm{i} & 4 & 2-\mathrm{i} \\ \frac{(1+\mathrm{i})^2}{4} & \mathrm{i}+2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2. Znaleźć wartości i wektory własne odwzorowania liniowego: $\mathcal{A}: V \to V$ zadanego macierzą:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   jeśli:

   (a) V jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywisych,

   (b) V jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb zespolonych.

3. (a) Znaleźć wartości i wektory własne macierzy:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Podać transformację diagonalizującą A.

(c) Znaleźć wartości i wektory własne A^{-1}.

4. Znaleźć wartości i wektory własne operatora $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ na zbiorze funkcji dwukrotnie różniczkowalnych na $< 0, 1 >$ znikających na krańcach przedziału.

5. Sprawdzić czy operator rzutu prostopadłego na $\mathbf{v}$ jest hermitowski:

$$\mathrm{Proj}_{\mathbf{v}}\mathbf{w} = \frac{< \mathbf{v}|\mathbf{w} >}{< \mathbf{v}|\mathbf{v} >}\mathbf{v}$$

Znaleźć wektory i wartości własne tego operatora.

6. Pokazać, że jeżeli $\{\mathbf{v_i}\}_{i=1}^{n}$ jest ortogonalną bazą wektorów własnych odwzorowania $\mathbf{A}$ o odpowiednich wartościach własnych $\lambda(\mathbf{v_i})$ to

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\mathbf{v}_i)\mathrm{Proj}_{\mathbf{v_i}}\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda(\mathbf{v}_i)\frac{< \mathbf{v}_i|\mathbf{w} >}{< \mathbf{v}_i|\mathbf{v}_i >}\mathbf{v}_i.$$

Zilustrować na przykładzie macierzy

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Znaleźć macierz ortogonalną diagonalizującą A oraz obliczyć $\sqrt{A}$ (w jednym z przykladów)

(a) $A = \begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$.

8. Znaleźć transformację unitarną diagonalizującą macierze:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2+2\,\mathrm{i} \\ 2-2\,\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 3 & -0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Obliczyć $\exp\{A\}$.

9. Pokazać, że macierz unitarna jest diagonalizowalna oraz pokazać, że moduły wartości własnych są równe 1. Zilustrować na przykładzie macierzy:
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -e^{\mathrm{i}\alpha}\sin\phi & 0 \\ e^{-\mathrm{i}\alpha}\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mathrm{i}\alpha} \end{pmatrix}$$
dla rzeczywistych α i ϕ

10. Wykazać, że
$$(\vec{x}\cdot\vec{\sigma})(\vec{y}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{x}\cdot\vec{y}) + \mathrm{i}\,\vec{\sigma}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})$$

11. W przestrzeni wielomianow trygonometrycznych stopnia $\leq$ n działa operator $T(\psi)(x) = \psi(x+a)$, $a \in R$. Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazie ortonormalnej $(1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x)....)$ i pokazać, że operator jest unitarny. Znaleźć wartosci własne i wektory własne.