

Egzamin z matematyki 2L

WERSJA A

1. Dla jakich wartości parametrów $p, q \in \mathbb{R}$ całka

$$\int_0^{\infty} x^{-p} e^{qx} dx$$

jest zbieżna? Zaznaczyć na płaszczyźnie (p, q) zbiór parametrów, dla których ta całka jest zbieżna. Obliczyć $\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx$.

2. Przekształcenie liniowe $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ jest obrotem w wyniku którego prosta $y = 2x$ przechodzi na prostą $y = -3x$. Znaleźć macierz przekształcenia \mathbf{T} w bazach standardowych. Ile wynosi kąt obrotu?

3. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję $\ln(1 - 2x^2)$ wokół $x = 0$ całkując wyraz po wyrazie rozwinięcie pochodnej tej funkcji. Określić promień zbieżności.

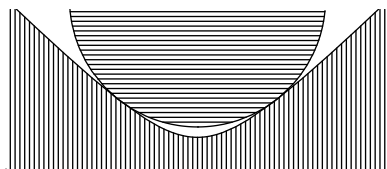
4. Znaleźć macierz A taką, że $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

5. Na powierzchni opisanej funkcją

$$z(x, y) = \sqrt{H^2 + x^2 + y^2}$$

w współrzędnych kartezjańskich (x i y w płaszczyźnie poziomej a z w pionie) leży sfera o promieniu $R = 2H$ w najniższej możliwej pozycji (patrz rysunek poniżej). Na jakiej wysokości nad dnem powierzchni opisanej funkcją $z(x, y)$ znajduje się środek sfery?

Wskazówka: Można wykorzystać warunek, że sfera jest styczna do powierzchni, na której leży. Warunek styczności oznacza również, że wektory normalne do sfery i powierzchni pokrywają się kierunkiem na linii styku.



Każde zadanie na osobnej kartce. Kartkę podpisać imieniem, nazwiskiem, numerem grupy oraz **literą A**. Czas pracy – 210 minut.