

**Egzamin z matematyki 2L**  
WERSJA B

1. Dla jakich wartości parametrów  $p, q \in \mathbb{R}$  całka

$$\int_0^{\infty} x^p e^{-qx} dx$$

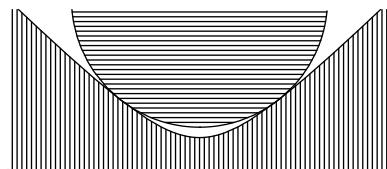
jest zbieżna? Zaznaczyć na płaszczyźnie  $(p, q)$  zbiór parametrów, dla których ta całka jest zbieżna. Obliczyć  $\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x} dx$ .

2. Przekształcenie liniowe  $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  jest obrotem w wyniku którego prosta  $y = 3x$  przechodzi na prostą  $y = -2x$ . Znaleźć macierz przekształcenia  $\mathbf{T}$  w bazach standardowych. Ile wynosi kąt obrotu?
3. Rozwinąć w szereg potęgowy funkcję  $\ln(1 + 3x^2)$  wokół  $x = 0$  całkując wyraz po wyrazie rozwinięcie pochodnej tej funkcji. Określić promień zbieżności.
4. Znaleźć macierz  $A$  taką, że  $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ .
5. Na powierzchni opisanej funkcją

$$z(x, y) = \sqrt{H^2 + x^2 + y^2}$$

w współrzędnych kartezjańskich ( $x$  i  $y$  w płaszczyźnie poziomej a  $z$  w pionie) leży sfera o promieniu  $R = 3H$  w najniższej możliwej pozycji (patrz rysunek poniżej). Na jakiej wysokości nad dnem powierzchni opisanej funkcją  $z(x, y)$  znajduje się środek sfery?

Wskazówka: Można wykorzystać warunek, że sfera jest styczna do powierzchni, na której leży. Warunek styczności oznacza również, że wektory normalne do sfery i powierzchni pokrywają się kierunkiem na linii styku.



Każde zadanie na osobnej kartce. Kartkę podpisać imieniem, nazwiskiem, numerem grupy oraz **literą B**. Czas pracy – 210 minut.