08.06.2005

Rozwiązania zadań z egzaminu z matematyki 2L

UWAGA: Rozwiązania drugiego i piątego zadania są różne w obu wersjach. Warto zapoznać się z oboma rozwiązaniami.

Wersja A

1. Rozważana całka może być rozbieżna z powodu zachowania funkcji podcałkowej zarówno dla $x \to 0$ jak i $x \to \infty$, dlatego trzeba rozdzielić ją na dwie całki

$$\int_0^\infty x^{-p} \mathrm{e}^{qx} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{-p} \mathrm{e}^{qx} \mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{-p} \mathrm{e}^{qx} \mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

(a) Zbieżność całki $I_1 = \int_0^1 x^{-p} \mathrm{e}^{qx} \mathrm{d}x$.

Dla $p \leq 0$ funkcja podcałkowa jest w przedziale całkowania ciągła i ograniczona, więc całka jest zbieżna. Dla $p \in (0,1)$ można oszacować

$$0 < x^{-p} \mathrm{e}^{qx} \leq x^{-p} \mathrm{e}^{|q|x} \leq x^{-p} \mathrm{e}^{|q|},$$

$$\int_0^1 x^{-p} \mathrm{e}^{|q|} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{|q|} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_0^1 = \mathrm{e}^{|q|} \frac{1}{1-p} < \infty,$$

a zatem całka jest w tym przedziale zbieżna. Dla $p \geq 1$ zachodzi oszacowanie

$$x^{-p} \mathrm{e}^{qx} \geq x^{-p} \mathrm{e}^{-|q|x} \geq x^{-p} \mathrm{e}^{-|q|},$$

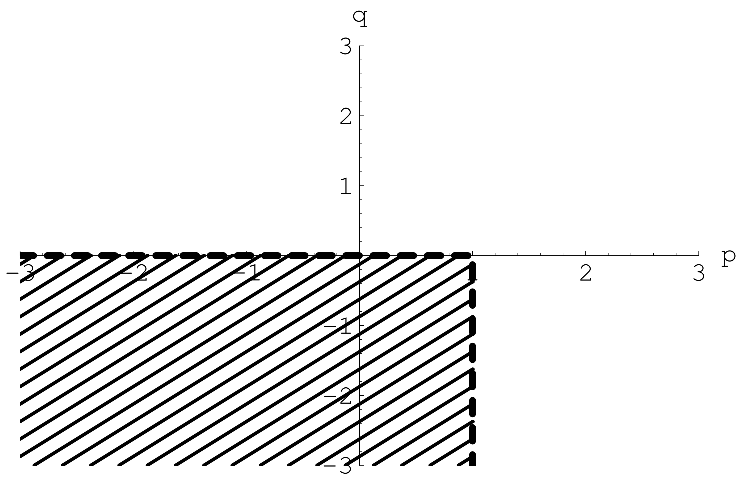
$$\int_0^1 x^{-p} \mathrm{e}^{-|q|} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-|q|} \int_0^1 x^{-p} \mathrm{d}x = \infty,$$

całka jest rozbieżna.

(b) Zbieżność całki $I_2 = \int_1^\infty x^{-p} \mathrm{e}^{qx} \mathrm{d}x$.

Dla $q > 0$ funkcja podcałkowa nie dąży do 0 dla $x \to \infty$, więc całka jest rozbieżna. Dla q=0

$$\int_1^\infty x^{-p} \mathrm{d}x$$



Rysunek 1: Zadanie 1, zbiór parametrów, dla których całka jest zbieżna.

jest zbieżna dla $p > 1$ a rozbieżna dla $p \leq 1$. Dla $q < 0$ można oszacować

$$0 < x^{-p}\mathrm{e}^{qx} < \mathrm{e}^{\frac{q}{2}x},$$

przy czym szacowanie to jest dobre jedynie dla dostatecznie dużych x (dla takich, dla których $x^{-p}\mathrm{e}^{\frac{q}{2}x} < 1$; taki x istnieje, bo wyrażenie to dąży do 0 dla $x \to \infty$).

$$\int_1^\infty \mathrm{e}^{\frac{q}{2}x} = \frac{2}{q}\,\mathrm{e}^{\frac{q}{2}x}\Big|_1^\infty = -\frac{2}{q}\mathrm{e}^{\frac{q}{2}} < \infty.$$

Rozważana całka jest zbieżna tylko gdy zbieżne są całki I_1 i I_2. Łącząc otrzymane w obu punktach warunki widać, że całka jest zbieżna dla $q < 0$ i $p < 1$. Obszar ten zaznaczono na rysunku 1.

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} & v(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x =$$

$$= \begin{vmatrix} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-2x} & v(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^\infty = \frac{1}{4}$$

2. Niech
$$v_1 = (1,2), \qquad v_2 = (1,-3).$$
Wektory te spełniają równanie odpowiednio pierwszej i drugiej zadanej prostej. Kąt pomiędzy prostymi jest więc równy kątowi pomiędzy tymi wektorami
$$\cos\alpha = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\ \|v_2\|}.$$
$$v_1 \cdot v_2 = 1\cdot 1 + 2\cdot(-3) = -5, \quad \|v_1\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \quad \|v_2\| = \sqrt{10},$$
$$\cos\alpha = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\alpha_1 = \frac{3}{4}\pi, \quad \alpha_2 = \frac{5}{4}\pi.$$
Macierz obrotu o zadany kąt α ma postać
$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$
więc znalezionym kątom odpowiadają obroty
$$\mathcal{O}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$
Jak łatwo policzyć
$$\mathcal{O}_1 v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{O}_2 v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$
Jedynie macierz $\mathcal{O}_2$ daje w działaniu na wektor v_1 wynik proporcjonalny do v_2, więc to ten obrót jest rozwiązaniem.
Macierz obrotu: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, kąt obrotu: $\frac{5}{4}\pi$.
Uwaga: W tym zadaniu równie dobrym wynikiem byłoby $\alpha = \frac{\pi}{4}$ i odpowiednia macierz obrotu. Jest tak ponieważ obrót prostej o kąt półpełny (π) nie zmienia jej.

3. Niech $y = 2x^2$. Wówczas
$$f(y) = \ln(1-y),$$
$$f'(y) = -\frac{1}{1-y}.$$

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego można rozpisać

$$f'(y) = -\sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} -y^n.$$

Całkując wyraz po wyrazie

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{n+1} y^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{y^n}{n} + C.$$

Stałą C można wyznaczyć rozważając przypadek $y = 0$

$$0 = \ln(1-y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{y^n}{n} + C = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{0^n}{n} + C = C.$$

Wyszło więc

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{y^n}{n},$$

podstawiając $y = 2x^2$ otrzymuje się wynik

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(2x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^n x^{2n}}{n}.$$

Promień zbieżności:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{2^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = \sqrt{2},$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Zbieżność na brzegach przedziału zbieżności:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^n \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = \infty,$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}}: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2^n \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = \infty.$$

Znaleziony szereg potęgowy jest więc zbieżny dla $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4. Na początku trzeba znaleźć wartości i wektory własne

$$\det\begin{pmatrix} 7-\lambda & -6 \\ 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad v_1 = (1,1),$$
$$\lambda_2 = 4 \qquad v_2 = (2,1)$$

(rachunki prowadzące do wyznaczenia wektorów własnych pominięto). Znalezione wektory definiują nową bazę. Macierz A w tej bazie ma postać

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pierwiastek z tej macierzy (jeden z czterech możliwych) to

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

By zapisać wynik w bazie standardowej trzeba skorzystać z macierzy przejścia (zbudowanej ze znalezionych wektorów własnych)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(pominięto wyliczanie macierzy odwrotnej – w tym przypadku $B^{-1} \neq B^T$, bo B nie jest hermitowska). Wynik końcowy otrzymuje się zamieniając bazę macierzy $\tilde{A}$:

$$A = B\tilde{A}B^{-1},$$
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Powierzchnia na którą położono kulę dana jest równaniem

$$z^2 = H^2 + x^2 + y^2.$$

Taka powierzchnia ma minimum dla $x = y = 0$, więc szukana kula musi mieć środek na prostej $x = y = 0$. Jej równanie ma więc postać

$$x^2 + y^2 + (z-h)^2 = R^2,$$

gdzie h jest wysokością na jakiej znajduje się środek kuli. Przecięcie obu figur jest rozwiązaniem układu równań

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - z^2 + H^2 & = & 0 \\ x^2 + y^2 + (z-h)^2 - R^2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Odejmując te równania stronami otrzymuje się

$$-z^2 + H^2 - (z-h)^2 + R^2 = 0,$$

$$-z^2 + H^2 - z^2 + 2zh - h^2 + R^2 = 0,$$

$$2z^2 - 2hz - H^2 - R^2 + h^2 = 0.$$

Jak widać na rysunku zamieszczonym w treści zadań, w najniższej możliwej pozycji linia styku sfery z powierzchnią jest okręgiem leżącym w płaszczyźnie $z = const$. Oznacza to, że znalezione równanie ma dla szukanego h tylko jedno rozwiązanie. Zatem rozwiązanie można znaleźć z warunku

$$\Delta = 0,$$

$$4h^2 - 8\left(-H^2 - R^2 + h^2\right) = 0,$$

$$-4h^2 + 8H^2 + 8R^2 = 0,$$

$$2H^2 + 2R^2 = h^2,$$

$$h = \sqrt{2H^2 + 2R^2}.$$

Wysokość h to odległość środka kuli od początku układu współrzędnych. Powierzchnia $z = \sqrt{H^2 + x^2 + y^2}$ ma dla $x = y = 0$ wysokość $z = H$, więc szukana odległość to

$$d = h - H = \sqrt{2H^2 + 2R^2} - H.$$

Dla $R = 2H$ otrzymuje się wynik

$$d = \left(\sqrt{10} - 1\right)H.$$

Wersja B

1. Rozważana całka może być rozbieżna z powodu zachowania funkcji podcałkowej zarówno dla $x \to 0$ jak i $x \to \infty$, dlatego trzeba rozdzielić ją na dwie całki

$$\int_0^\infty x^p e^{-qx} dx = \int_0^1 x^p e^{-qx} dx + \int_1^\infty x^p e^{-qx} dx = I_1 + I_2.$$

   (a) Zbieżność całki $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^p e^{-qx} dx$.
   Dla $p \geq 0$ funkcja podcałkowa jest w przedziale całkowania ciągła i ograniczona, więc całka jest zbieżna. Dla $p \in (-1, 0)$ można oszacować

$$0 < x^p e^{-qx} \leq x^p e^{|q|x} \leq x^p e^{|q|},$$

$$\int_0^1 x^p e^{|q|} dx = e^{|q|} \left. \frac{x^{p+1}}{p+1} \right|_0^1 = e^{|q|} \frac{1}{p+1} < \infty,$$

a zatem całka jest w tym przedziale zbieżna. Dla $p \leq -1$ zachodzi oszacowanie

$$x^p e^{qx} \geq x^p e^{-|q|x} \geq x^p e^{-|q|},$$

$$\int_0^1 x^p e^{-|q|} dx = e^{-|q|} \int_0^1 x^p dx = \infty,$$

całka jest rozbieżna.

(b) Zbieżność całki $I_2 = \int_1^\infty x^p e^{-qx} dx$.

Dla $q < 0$ funkcja podcałkowa nie dąży do 0 dla $x \to \infty$, więc całka jest rozbieżna. Dla q=0

$$\int_1^\infty x^p dx$$

jest zbieżna dla $p < -1$ a rozbieżna dla $p \geq -1$. Dla $q > 0$ można oszacować

$$0 < x^p e^{-qx} < e^{-\frac{q}{2}x},$$

przy czym szacowanie to jest dobre jedynie dla dostatecznie dużych x (dla takich, dla których $x^p e^{-\frac{q}{2}x} < 1$; taki x istnieje, bo wyrażenie to dąży do 0 dla $x \to \infty$).

$$\int_1^\infty e^{-\frac{q}{2}x} = -\frac{2}{q} \left. e^{-\frac{q}{2}x} \right|_1^\infty = \frac{2}{q} e^{\frac{q}{2}} < \infty.$$

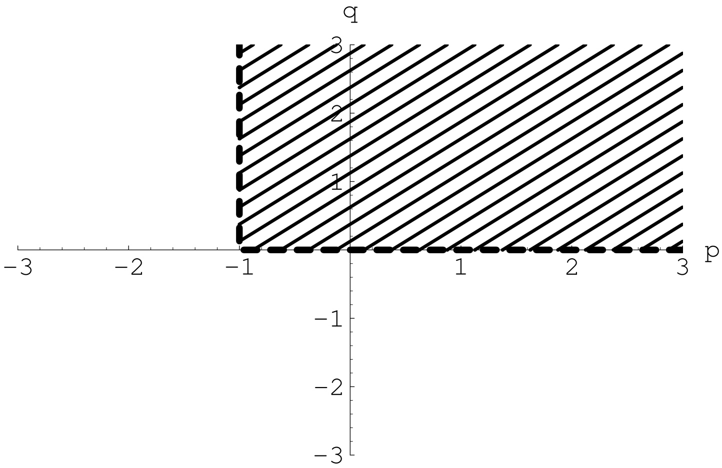
Rozważana całka jest zbieżna tylko gdy zbieżne są całki I_1 i I_2. Łącząc otrzymane w obu punktach warunki widać, że całka jest zbieżna dla $q > 0$ i $p > -1$. Obszar ten zaznaczono na rysunku 2.

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x} dx = \left| \begin{array}{ll} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v'(x) = e^{-3x} & v(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{3} x^2 e^{-3x} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2}{3} x e^{-3x} dx = \frac{2}{3} \int_0^\infty x e^{-3x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{-3x} & v(x) = -\frac{1}{3} e^{-3x} \end{array} \right| = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} x e^{-3x} \Big|_0^\infty + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \int_0^\infty e^{-3x} dx =$$

$$= -\frac{2}{27} e^{-3x} \Big|_0^\infty = \frac{2}{27}$$



Rysunek 2: Zadanie 1, zbiór parametrów, dla których całka jest zbieżna.

2. Niech $v_1 = (1,3)$ będzie pewnym ustalonym wektorem wskazującym punkt na prostej $y = 3x$. Niech $v_2 = (\tilde{x}, \tilde{y})$ będzie wektorem leżącym na prostej $y = -2x$ na który przechodzi wektor v_1 w wyniku szukanego obrotu. Ponieważ wektor v_2 leży na prostej $y = -2x$ między jego współrzędnymi zachodzi związek

$$\tilde{y} = -2\tilde{x}.$$

drugie równanie uzyskuje się z warunku zachowywania normy wektorów przez obrót

$$\|v_1\| = \|v_2\| \Rightarrow \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 10.$$

Dwa znalezione równania pozwalają wyznaczyć wektor v_2. Szczegółowe rachunki pominięto.

$$v_2^1 = \left(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right), \qquad v_2^2 = \left(\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right).$$

Macierz obrotu o kąt α ma postać

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Szukana macierz obrotu, pod działaniem której wektor v_1 przechodzi na wektor v_2^1 spełnia równanie

$$\mathcal{O}_1 v_1 = v_2^1,$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Ten układ równań liniowych można łatwo rozwiązać

$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Analogiczny rachunek można powtórzyć dla wektora v_2^2. Otrzymuje się

$$\sin\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{4} + \pi.$$

Choć obu wynikom odpowiadają inne obroty to tak na prawdę jest to to samo rozwiązanie. W drugim przypadku, po wykonaniu obrotu o $\frac{\pi}{4}$ dodatkowo dokonano obrót o π. Obrót prostej o kąt π nie zmienia jej. Dlatego można przyjąć α_1 jako kąt obrotu. Otrzymany wynik to

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

3. Niech $y = 3x^2$. Wówczas

$$f(y) = \ln(1+y),$$

$$f'(y) = \frac{1}{1+y}.$$

Korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego można rozpisać

$$f'(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n.$$

Całkując wyraz po wyrazie

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} y^{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} + C.$$

Stałą C można wyznaczyć rozważając przypadek $y = 0$

$$0 = \ln(1+y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} + C = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{0^n}{n} + C = C.$$

Wyszło więc

$$f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n},$$

podstawiając $y = 3x^2$ otrzymuje się wynik

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(3x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^{2n}}{n}.$$

Promień zbieżności:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{3^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} = \sqrt{3},$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Zbieżność na brzegach przedziału zbieżności:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} < \infty,$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}: \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} < \infty.$$

(Zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ wynika z kryterium Leibnitza.)

Znaleziony szereg potęgowy jest więc zbieżny dla $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

4. Na początku trzeba znaleźć wartości i wektory własne

$$\det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 3 \\ -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad v_1 = (-1, 2),$$
$$\lambda_2 = 4 \qquad v_2 = (-1, 1)$$

(rachunki prowadzące do wyznaczenia wektorów własnych pominięto). Znalezione wektory definiują nową bazę. Macierz A w tej bazie ma postać

$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pierwiastek z tej macierzy (jeden z czterech możliwych) to

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

By zapisać wynik w bazie standardowej trzeba skorzystać z macierzy przejścia (zbudowanej ze znalezionych wektorów własnych)

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(pominięto wyliczanie macierzy odwrotnej – w tym przypadku $B^{-1} \neq B^T$, bo B nie jest hermitowska). Wynik końcowy otrzymuje się zamieniając bazę macierzy $\tilde{A}$:

$$A = B\tilde{A}B^{-1},$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Niech funkcja f opisuje powierzchnię, a funkcja g kulę. Postać funkcji f jest dana w treści zadania

$$f(x, y) = \sqrt{H^2 + x^2 + y^2},$$

równanie kuli na wysokości h nad początkiem układu współrzędnych to

$$x^2 + y^2 + (z - h)^2 = R^2 \Rightarrow z = h \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

więc (znak „–" został wybrany, bo styczna do podłoża ma być połowa sfery)

$$g(x, y) = h - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Zadanie to wygodniej jest rozwiązywać w walcowym układzie współrzędnych

$$x = r \sin\phi, \quad y = r\cos\phi,$$

jak łatwo wyliczyć

$$f(r, \phi) = \sqrt{H^2 + r^2},$$
$$g(r, \phi) = h - \sqrt{R^2 - r^2},$$

widać, że obie bryły mają symetrię obrotową. (UWAGA: równoważne przejściu do układu walcowego jest zauważenie symetrii sferycznej i położenie $y = 0$.) W dalszej części funkcje f i g będą rozpatrywane jako funkcje jednej zmiennej r. Sfera leży na powierzchni, gdy w pewnym punkcie r_0 obie funkcje są do siebie styczne, a zatem muszą zachodzić dwa równania

$$f(r_0) = g(r_0), \quad f'(r_0) = g'(r_0),$$

otrzymano więc układ równań

$$\begin{cases} \sqrt{H^2+r_0^2} & = & h-\sqrt{R^2-r_0^2}, \\ \frac{r_0}{\sqrt{H^2+r_0^2}} & = & \frac{r_0}{\sqrt{R^2-r_0^2}}. \end{cases}$$

Z drugiego równania można wyliczyć

$$\sqrt{H^2+r_0^2}=\sqrt{R^2-r_0^2},$$

$$H^2+r_0^2=R^2-r_0^2,$$

$$r_0^2=\frac{1}{2}\Big(R^2-H^2\Big).$$

Podstawiając ten wynik do pierwszego równania, po prostych obliczeniach otrzymuje się

$$h=\sqrt{2(H^2+R^2)},$$

by obliczyć szukaną wysokość d na jakiej nad dnem powierzchni znajduje się środek sfery trzeba od otrzymanego wyniku odjąć odległość dna powierzchni od początku układu współrzędnych

$$d=h-f(0)=\sqrt{2(H^2+R^2)}-H.$$

Dla $R=3H$

$$d=\Big(2\sqrt{5}-1\Big)H.$$