

Egzamin poprawkowy z matematyki 2L

1. Niech $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obliczyć $B = e^{aA}$, dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

2. Rozwinąć funkcję $f(x) = (1 + e^x)^2$ w szereg potęgowy.

3. Dana jest funkcja

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{-4x - x^2} & \text{dla } -4 \leq x \leq -3, \\ \sqrt{3} & \text{dla } -3 < x < 3, \\ \sqrt{4x - x^2} & \text{dla } 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

(a) Sprawdzić, że funkcja $g(x)$ jest ciągła.

(b) Obliczyć długość krzywej $g(x)$.

Wskazówka: Zastosować podstawienie trygonometryczne.

(c) Obliczyć objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu krzywej $g(x)$ wokół osi x .

4. Obliczyć poniższe całki nieoznaczone.

(a) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx,$

(b) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx,$

(c) $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$

5. Dana jest funkcja

$$h(x, y) = \frac{x + y}{x - y}.$$

(a) Obliczyć pochodne cząstkowe $\frac{\partial h}{\partial x}$ i $\frac{\partial h}{\partial y}$.

(b) Sprawdzić równość drugich pochodnych

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}.$$

Każde zadanie na osobnej kartce. Kartkę podpisać imieniem, nazwiskiem i numerem grupy ćwiczeniowej. Czas pracy – 210 minut.