08.06.2005

Rozwiązania zadań z egzaminu poprawkowego z matematyki 2L

1. Łatwo wyliczyć

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I,$$

$$A^{2n}=\left(A^2\right)^n=I^n=I,$$

$$A^{2n+1}=A\cdot A^{2n}=A\cdot I=A.$$

$$B=\mathrm{e}^{aA}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(aA)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^nA^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^{2n}A^{2n}}{(2n)!}+\frac{a^{2n+1}A^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^{2n}I}{(2n)!}+\frac{a^{2n+1}A}{(2n+1)!}\right)=I\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}+A\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ale

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a+\mathrm{e}^{-a}\right)=\cosh a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-a)^n}{n!}\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}\right)=\sinh a,$$

a więc

$$B=I\ \cosh a+A\ \sinh a=\begin{pmatrix}\cosh a&\sinh a\\\sinh a&\cosh a\end{pmatrix}.$$

2. $f(x)=(1+\mathrm{e}^x)^2=1+2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}=1+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^n+2^nx^n}{n!}=1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+2^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$
gdzie

$$a_0=1+2+2^0=4,\quad a_n=2+2^n,\ \text{dla } n>0.$$

3. (a) Wewnątrz przedziałów funkcja jest iloczynem sumą i złożeniem funkcji ciągłych, więc jest ciągła. Na brzegach przedziałów

$$g\left(-3^-\right)=g(-3)=\sqrt{-4(-3)-(-3)^2}=\sqrt{12-9}=\sqrt{3},$$

$$g\left(-3^{+}\right)=\sqrt{3},$$
$$g\left(3^{-}\right)=\sqrt{3},$$
$$g\left(3^{+}\right)=g(3)=\sqrt{4\cdot 3-3^2}=\sqrt{12-9}=\sqrt{3}.$$

Widać więc że funkcja $g(x)$ jest ciągła.

(b) Jak łatwo sprawdzić $g(x)=g(-x)$, więc w rachunkach można ograniczyć się jedynie do $x>0$ i otrzymany wynik pomnożyć przez dwa.

- $x\in(0,3)$
  Na tym odcinku funkcja g jest stała, więc jej długość to po prostu długość odcinka
  $$l_1=3.$$
- $x\in(3,4)$
  Na tym odcinku
  $$g(x)=\sqrt{4x-x^2}\Rightarrow g'(x)=\frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}=\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}},$$
  $$l_2=\int_3^4\sqrt{1+(g'(x))}\,\mathrm{d}x=\int_3^4\sqrt{1+\left(\frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x=$$
  $$=\int_3^4\sqrt{1+\frac{(2-x)^2}{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_3^4\sqrt{\frac{4x-x^2+4-4x+x^2}{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x=$$
  $$=\int_3^4\frac{2}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int_3^4\frac{2}{\sqrt{-(x-2)^2+4}}\,\mathrm{d}x=$$
  $$=\int_3^4\frac{2}{2\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x=\int_3^4\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x=$$
  $$=\left|\begin{array}{c} y=\frac{x-2}{2}\\ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}x=2\mathrm{d}y\\ x=3\Rightarrow y=\frac{1}{2}\\ x=4\Rightarrow y=1\end{array}\right|=2\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=$$
  $$=\left|\begin{array}{c} y=\sin t\\ \mathrm{d}y=\cos t\ \mathrm{d}t\\ y=\frac{1}{2}\Rightarrow t=\frac{\pi}{6}\\ y=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\ \mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t}\mathrm{d}t=$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Całkowita długość krzywej wynosi więc $l = 2l_1 + 2l_2 = 6 + \frac{2}{3}\pi$.

(c) Ze względu na parzystość funkcji g tutaj także wystarczy ograniczyć się do przedziału $x > 0$ i podwoić wynik.

$$\frac{1}{2}V = \int_0^4 \pi(g(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^3 3\pi \, \mathrm{d}x + \int_3^4 \pi\Big(\sqrt{4x - x^2}\Big)^2 \, \mathrm{d}x =$$

$$= 9\pi + \pi \int_3^4 \Big(4x - x^2\Big)\mathrm{d}x = 9\pi + \pi \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_3^4 =$$

$$= 9\pi + \pi\Big(2 \cdot 16 - 2 \cdot 9 - \frac{64}{3} + 9\Big) = 10\frac{2}{3}\pi,$$

$$V = 21\frac{1}{3}\pi.$$

4. (a)

$$\frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} =$$

$$= \frac{A(x^2 - 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)}{x^3 - x} =$$

$$= \frac{(A + B + C)x^2 + (B - C)x - A}{x^3 - x}.$$

$$\begin{cases} A + B + C &= 1 \\ B - C &= 0 \\ -A &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A &= -1 \\ B &= 1 \\ C &= 1 \end{cases}.$$

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} \, \mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 1} + \int \frac{\mathrm{d}x}{x + 1} =$$

$$= -\ln|x| + \ln|x - 1| + \ln|x + 1| + C = \ln\left|\frac{x^2 - 1}{x}\right|.$$

(b)

$$I = \int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = \frac{1}{x} & v = \ln x \end{array} \right| =$$

$$= \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \ln^2 x - I$$

$$2I = \ln^2 x \Rightarrow I = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

(c)
$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t=\cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x \\ x=\arccos t \end{array} \right| = \int \frac{-\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$
$$= -\mathrm{arctg}\ t + C = -\mathrm{arctg}\ (\arccos x) + C.$$

5. (a)
$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{x+y}{x-y} = \frac{1\cdot(x-y) - 1\cdot(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2},$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{x+y}{x-y} = \frac{1\cdot(x-y) + 1\cdot(x+y)}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}.$$

(b)
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\,\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{2(x-y)^2 - 2(x-y)2x}{(x-y)^4},$$
$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{-2y}{(x-y)^2} = \frac{-2(x-y)^2 + 2(x-y)(-2y)}{(x-y)^4},$$

ale
$$2(x-y)^2 - 2(x-y)2x = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 4x^2 + 4xy = -2x^2 + 2y^2,$$
$$-2(x-y)^2 + 2(x-y)(-2y) = -2x^2 + 4xy - 2y^2 - 4xy + 4y^2 =$$
$$= -2x^2 + 2y^2,$$

więc
$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{-2x^2 + 2y^2}{(x-y)^4}.$$