13.04.2005

I kolokwium z matematyki 2L

1. Dla jakich wartości parametru a poniższe wektory są liniowo zależne:
   (a) $(1, 3, 4)$, $(2, 5, 7)$, $(3, a, 5)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$,
   (b) $(1 + \mathrm{i}, 2 - 3\,\mathrm{i}, a + 5)$, $(a, 5 - \mathrm{i}, 3 + 7\,\mathrm{i})$ w przestrzeni $\mathbb{C}^3$,
   (c) $5x^2 + x + a$, $2x^2 + ax + 2$, $-3x^2 + a$ w przestrzeni wielomianów nad $\mathbb{R}$ stopnia co najwyżej 2.

2. Dla jakich wartości zespolonych parametrów a, b i c macierz
$$\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ a & 0 & i \\ 0 & b & 1 + ic \end{pmatrix}$$
jest hermitowska? Po podstawieniu znalezionych wartości parametrów wyliczyć wartości i wektory własne tej macierzy.

3. Wykazać, że $\left[(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}), (\vec{y} \cdot \vec{\sigma})\right]_+ = 2\,(\vec{x} \cdot \vec{y})$, gdzie $[a, b]_+ = ab + ba$.

4. Niech A odwzorowuje $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$. Macierz odwzorowania w bazie kanonicznej ma postać $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Znaleźć jądro odwzorowania A, bazę w jądrze i bazę w podprzestrzeni ortogonalnej do jądra.
   (b) Wektory z obu tych baz definiują nową bazę w $\mathbb{R}^3$. Podać macierz przejścia od bazy kanonicznej do tej nowej bazy.
   (c) Podać postać macierzy odwzorowania A w nowej bazie.

5. W przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$, w bazie kanonicznej dane są trzy wektory: $\mathbf{v}_1 = (-3, 0, 4), \mathbf{v}_2 = (1, -2, 2), \mathbf{v}_3 = (0, 8, -15)$.
   (a) Sprawdzić ich liniową niezależność.
   (b) Unormować te wektory.
   (c) Obliczyć kosinusy kątów pomiędzy tymi wektorami.
   (d) Korzystając z procedury otogonalizacyjnej Grama-Schmidta skonstruować bazę ortonormalną $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ tak, aby wektor $\mathbf{e}_1$ był proporcjonalny do $\mathbf{v}_1$.

Każde zadanie na osobnej kartce. Kartkę podpisać imieniem, nazwiskiem i numerem grupy. Czas pracy – 210 minut.