11.05.2005

Rozwiązania zadań z II kolokwium z matematyki 2L

Wersja A

1. Równanie dowolnego okręgu ma postać

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

gdzie (a,b) to współrzędne środka, a r to promień. Środek okręgu musi leżeć na zadanej prostej, a więc musi być spełnione równanie

$$b=2a+10.$$

Szukane równanie okręgu musi więc być postaci

$$(x-a)^2+(y-2a-10)^2=r^2.$$

Podstawiając współrzędne punktów A i B otrzymuje się układ równań

$$\begin{cases} (-4-a)^2+(-2a-10)^2=r^2, \\ (6-a)^2+(-2a-10)^2=r^2. \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymuje się

$$(-4-a)^2-(6-a)^2=0 \Rightarrow a=1,$$

i dalej już prosto można wyliczyć

$$b=12, \qquad r=13.$$

Równanie szukanego okręgu ma więc postać

$$(x-1)^2+(y-12)^2=13^2.$$

2. Macierz tej formy kwadratowej to

$$M=\begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}.$$

Na początku trzeba znaleźć transformację diagonalizującą – w tym celu trzeba wyznaczyć wartości i wektory własne

$$\det\begin{bmatrix} 7-\lambda & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 64 = (\lambda-4)(\lambda-16).$$

$$\lambda_1 = 4, \qquad \begin{bmatrix} 3 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\lambda_2 = 16, \qquad \begin{bmatrix} -9 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

(Proste obliczenia prowadzące do wyznaczenia unormowanych wektorów własnych zostały pominięte.) Znalezione wektory własne definiują transformację diagonalizującą

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Część liniowa formy kwadratowej zmienia się pod wpływem tej transformacji następująco

$$-\left(32-12\sqrt{3}\right)x - \left(32\sqrt{3}+12\right)y =$$

$$= -\left(32-12\sqrt{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' + \frac{1}{2}y'\right) - \left(32\sqrt{3}+12\right)\left(-\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) =$$

$$= 24x' - 64y'.$$

Badana forma kwadratowa ma w nowych współrzędnych postać

$$4(x')^2 + 16(y')^2 + 24x' - 64y' + 84 = 0, \tag{2}$$

$$4\left[(x')^2 + 6x'\right] + 16\left[(y')^2 - 4y'\right] + 84 = 0,$$

$$4\left[(x'+3)^2 - 9\right] + 16\left[(y'-2)^2 - 4\right] + 84 = 0,$$

$$4(x'+3)^2 + 16(y'-2)^2 - 36 - 64 + 84 = 0,$$

$$4(x'+3)^2 + 16(y'-2)^2 = 16.$$

Można wprowadzić nowe zmienne

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 3, \\ y'' &= y' - 2, \end{aligned} \tag{3}$$

w których badana forma przyjmuje postać

$$4(x'')^2 + 16(y'')^2 = 16,$$

$$\frac{(x'')^2}{2^2} + \frac{(y'')^2}{1^2} = 1. \tag{4}$$

Widać, że jest to elipsa o półosiach długości 2 i 1. Na rysunku 1 przedstawiono elipsę zadaną równaniem (4). Zamiana zmiennych (3) to translacja figury o wektor $(-3, 1)$. Krzywą po tej operacji przedstawiono na rysunku 2. Zamiana zmiennych (1) to obrót. Jak łatwo sprawdzić

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6} \\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix},$$

czyli macierz ta wykonuje obrót zgodnie z ruchem wskazówek zegara o kąt $\frac{\pi}{6}$. Figurę jaką otrzymuje się po tej operacji przedstawiono na rysunku 3.

3. (a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3 + t^2} = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t+1} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s = t+1 \\ t = s-1 \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t \end{array} \right| = 6\int \frac{(s-1)^3}{s}\mathrm{d}s = 6\int \frac{s^3 - 3s^2 + 3s - 1}{s}\mathrm{d}s =$$

$$= 6\int \left(s^2 - 3s + 3 - \frac{1}{s}\right)\mathrm{d}s = 6\left(\frac{1}{3}s^3 - 3\frac{1}{2}s^2 + 3s - \ln|s|\right) + C =$$

$$= 2s^3 - 9s^2 + 18s - 6\ln|s| + C =$$

$$= 2(t+1)^3 - 9(t+1)^2 + 18(t+1) - 6\ln|t+1| + C =$$

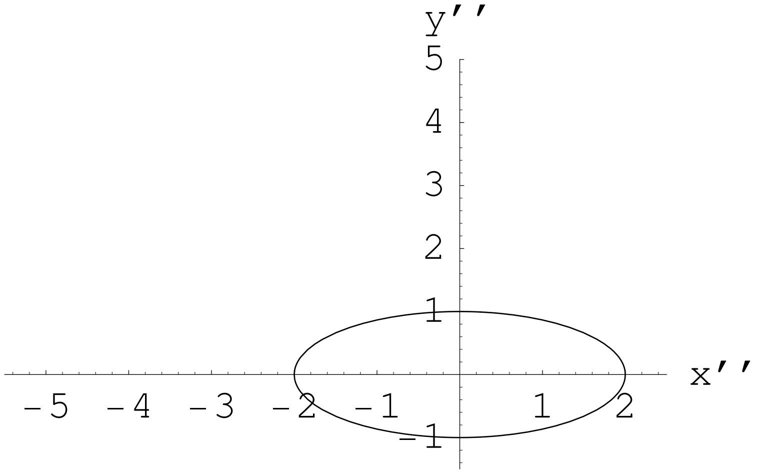
$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t + 11 - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left(\sqrt[6]{x} + 1\right) + \tilde{C},$$

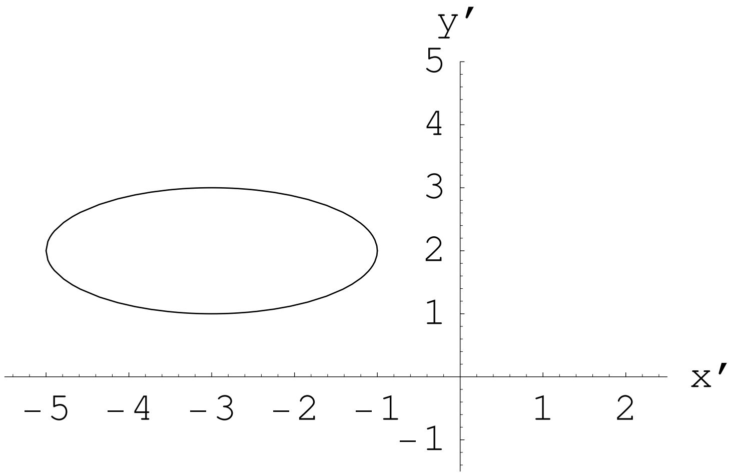
(b) $$\int \sin^3 x\mathrm{d}x = \int \sin^2 x \sin x\mathrm{d}x = \int \left(1 - \cos^2 x\right)\sin x\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ \mathrm{d}t = -\sin x\mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \left(1 - t^2\right)\mathrm{d}t = -\left(t - \frac{1}{3}t^3\right) + C =$$

$$= -t + \frac{1}{3}t^3 + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C,$$



Rysunek 1: Zadanie 2, wersja A. Krzywa zadana równaniem (4).

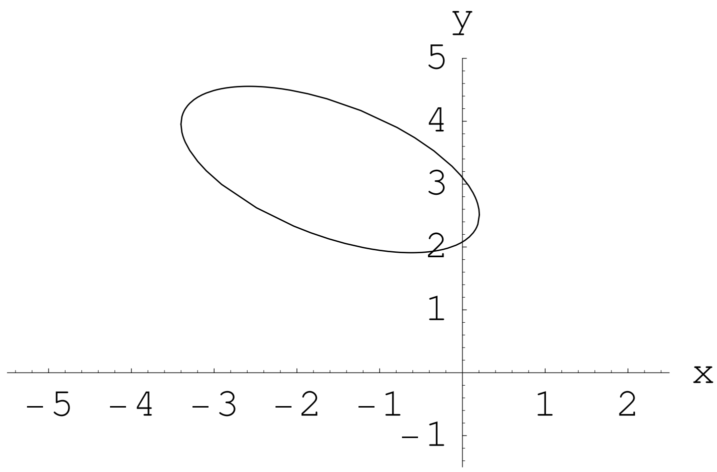


Rysunek 2: Zadanie 2, wersja A. Krzywa zadana równaniem (2).

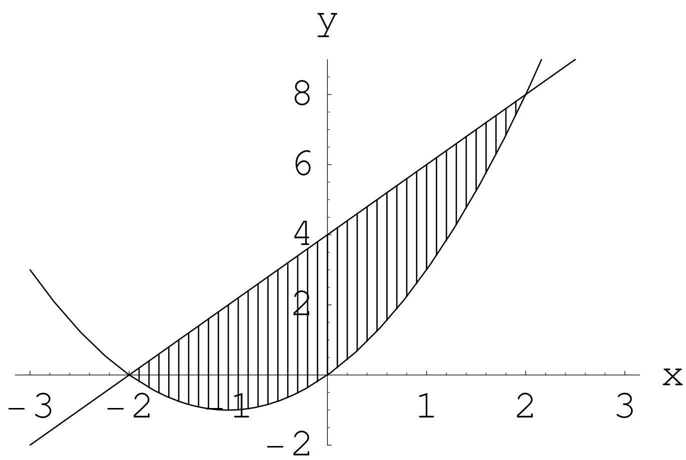
(c)
$$x^3 + x^2 + x = x\Big(x^2 + x + 1\Big).$$
Funkcję wymierną należy rozłożyć na ułamki proste

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{(A+B)x^2 + (A+C)x + A}{x(x^2+x+1)}.$$

Równość powyższa zachodzi (jak łatwo wyliczyć) dla $A = 1$,



Rysunek 3: Zadanie 2, wersja A. Rysunek formy kwadratowej podanej w zadaniu.



Rysunek 4: Zadanie 4, wersja A. Figura, której pole należy wyznaczyć.

$B = C = -1$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 + x^2 + x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x,$$

ale

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|,$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big(\frac{2x+1}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\Big)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{c} y = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{4}}\mathrm{d}y \end{array}\right| = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} y =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right),$$

a więc

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+x^2+x} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| -$$
$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

4. Na rysunku 4 narysowana jest figura której pole należy wyznaczyć. Punkty przecięcia paraboli z prostą można wyliczyć z układu równań

$$\left\{\begin{array}{l} y - x^2 - 2x = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^2 + 2x \\ y = 2x + 4 \end{array}\right. \Rightarrow x^2 + 2x = 2x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x \in \{-2, 2\}.$$

Szukane pole wyraża się więc całką

$$\int_{-2}^{2}\left[(2x+4) - \left(x^2+2x\right)\right]\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)\mathrm{d}x = \left(4x - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 4\cdot 4 + \frac{1}{3}(8+8) = \frac{32}{3}.$$

5. Zadanie to zostanie rozwiązane w biegunowym układzie współrzędnych.

$$I = \int r^2\mathrm{d}m = \int r^2\rho(r)\mathrm{d}S$$

W układzie biegunowym element powierzchni

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r,$$

więc

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_a^b \mathrm{d}r r^3 \rho(r) = 2\pi \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+1}}.$$

Do obliczenia tej całki należy zgodnie ze wskazówką wykorzystać podstawienie Eulera.

$$I = 2\pi \int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+1}} = \left| \begin{array}{c} x = r + \sqrt{r^2+1} \\ \mathrm{d}x = \frac{r+\sqrt{r^2+1}}{\sqrt{r^2+1}}\mathrm{d}r \\ \mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{r^2+1}}\mathrm{d}r \\ \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+1}} \end{array} \right| = 2\pi \int_{a+\sqrt{a^2+1}}^{b+\sqrt{b^2+1}} \frac{\mathrm{d}x}{x} =$$

$$= 2\pi \left(\ln|x|\right)\Big|_{a+\sqrt{a^2+1}}^{b+\sqrt{b^2+1}} = 2\pi \ln \frac{b+\sqrt{b^2+1}}{a+\sqrt{a^2+1}}.$$

Wersja B

1. Równanie dowolnego okręgu ma postać

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

gdzie (a, b) to współrzędne środka, a r to promień. Środek okręgu musi leżeć na zadanej prostej, a więc musi być spełnione równanie

$$b = -2a + 10.$$

Szukane równanie okręgu musi więc być postaci

$$(x-a)^2 + (y+2a-10)^2 = r^2.$$

Podstawiając współrzędne punktów A i B otrzymuje się układ równań

$$\begin{cases} (4-a)^2 + (2a-10)^2 = r^2, \\ (-6-a)^2 + (2a-10)^2 = r^2. \end{cases}$$

Odejmując te równania stronami otrzymuje się

$$(4-a)^2 - (-6-a)^2 = 0 \Rightarrow a = -1,$$

i dalej już prosto można wyliczyć

$$b = 12, \qquad r = 13.$$

Równanie szukanego okręgu ma więc postać

$$(x+1)^2 + (y-12)^2 = 13^2.$$

2. Macierz tej formy kwadratowej to

$$M = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Na początku trzeba znaleźć transformację diagonalizującą – w tym celu trzeba wyznaczyć wartości i wektory własne

$$\det \begin{bmatrix} 10-\lambda & -8 \\ -8 & 10-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 20\lambda + 36 = (\lambda-2)(\lambda-18).$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ -8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\lambda_2 = 18, \qquad \begin{bmatrix} -8 & -8 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad v_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(Proste obliczenia prowadzące do wyznaczenia unormowanych wektorów własnych zostały pominięte.) Znalezione wektory własne definiują transformację diagonalizującą

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Część liniowa formy kwadratowej zmienia się pod wpływem tej transformacji następująco

$$22\sqrt{2}x - 14\sqrt{2}y =$$
$$= 22\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - 14\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) =$$
$$= 8x' + 36y'.$$

Badana forma kwadratowa ma w nowych współrzędnych postać

$$2(x')^2 + 18(y')^2 + 8x' - 36y' + 8 = 0, \tag{6}$$

$$2\Big[(x')^2 + 4x'\Big] + 18\Big[(y')^2 - 2y'\Big] + 8 = 0,$$

$$2\Big[(x'+2)^2 - 4\Big] + 18\Big[(y'-1)^2 - 1\Big] + 8 = 0,$$

$$2(x'+2)^2 + 18(y'-1)^2 - 8 - 18 + 8 = 0,$$

$$2(x'+2)^2 + 18(y'-1)^2 = 18.$$

Można wprowadzić nowe zmienne

$$\begin{aligned} x'' &= x' + 2, \\ y'' &= y' - 1, \end{aligned} \tag{7}$$

w których badana forma przyjmuje postać

$$2(x'')^2 + 18(y'')^2 = 18,$$

$$\frac{(x'')^2}{3^2} + \frac{(y'')^2}{1^2} = 1. \tag{8}$$

Widać, że jest to elipsa o półosiach długości 3 i 1. Na rysunku 5 przedstawiono elipsę zadaną równaniem (8). Zamiana zmiennych (7) to translacja figury o wektor $(-2, 1)$. Krzywą po tej operacji przedstawiono na rysunku 6. Zamiana zmiennych (5) to obrót. Jak łatwo sprawdzić

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1}}{2} & -\frac{\sqrt{1}}{2} \\ \frac{\sqrt{1}}{2} & \frac{\sqrt{1}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix},$$

czyli macierz ta wykonuje obrót przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt $\frac{\pi}{4}$. Figurę jaką otrzymuje się po tej operacji przedstawiono na rysunku 7.

3. (a) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{6t^5\mathrm{d}t}{t^3 - t^2} = 6\int \frac{t^3\mathrm{d}t}{t-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} s = t - 1 \\ t = s + 1 \\ \mathrm{d}s = \mathrm{d}t \end{array} \right| = 6\int \frac{(s+1)^3}{s}\mathrm{d}s = 6\int \frac{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}{s}\mathrm{d}s =$$

$$= 6\int \left(s^2 + 3s + 3 + \frac{1}{s}\right)\mathrm{d}s = 6\left(\frac{1}{3}s^3 + 3\frac{1}{2}s^2 + 3s + \ln|s|\right) + C =$$

$$= 2s^3 + 9s^2 + 18s + 6\ln|s| + C =$$

$$= 2(t-1)^3 + 9(t-1)^2 + 18(t-1) + 6\ln|t-1| + C =$$

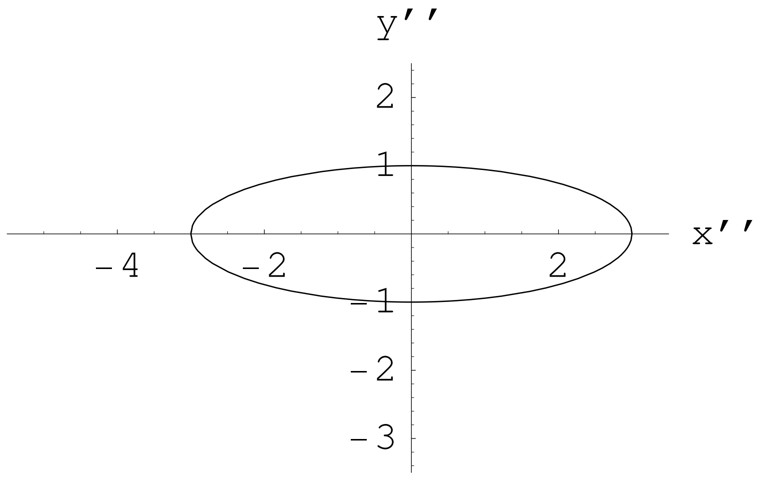
$$= 2t^3 + 3t^2 + 6t - 11 + 6\ln|t-1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right| + \tilde{C},$$

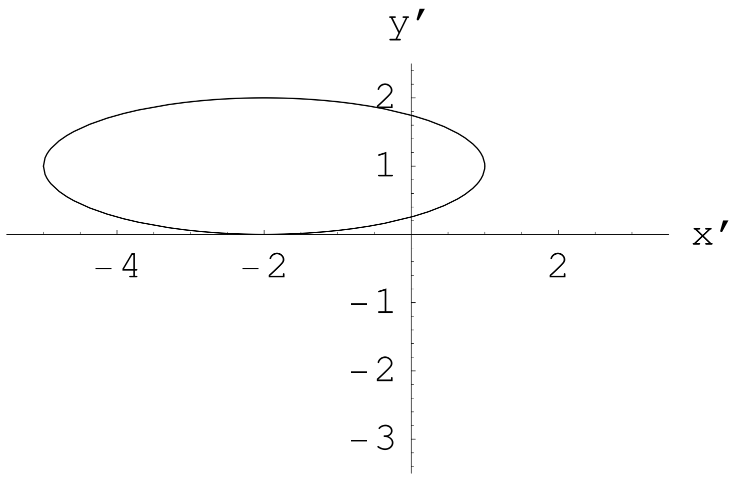
(b) $$\int \cos^3 x\mathrm{d}x = \int \cos^2 x \cos x\mathrm{d}x = \int \left(1 - \sin^2 x\right)\cos x\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin x \\ \mathrm{d}t = \cos x\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \left(1 - t^2\right)\mathrm{d}t = \left(t - \frac{1}{3}t^3\right) + C =$$

$$= t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C,$$



Rysunek 5: Zadanie 2, wersja B. Krzywa zadana równaniem (8).



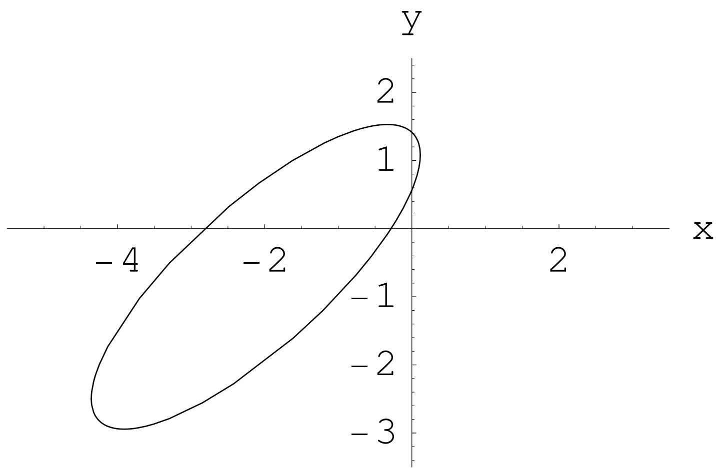
Rysunek 6: Zadanie 2, wersja B. Krzywa zadana równaniem (6).

(c) $$x^3 + x^2 + x = x\Big(x^2 + x + 1\Big).$$

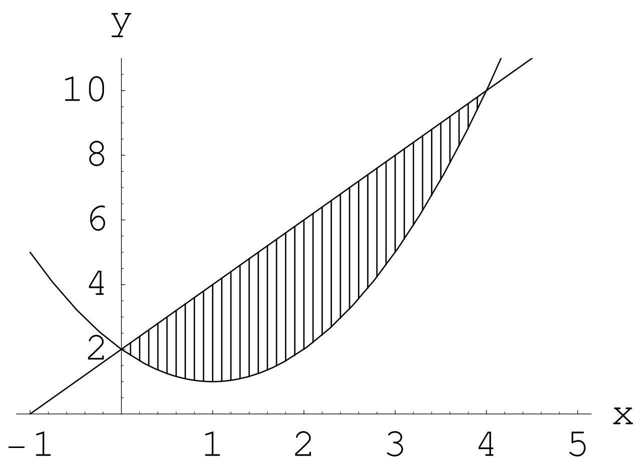
Funkcję wymierną należy rozłożyć na ułamki proste

$$\frac{x+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (A+C)x + A}{x(x^2+x+1)}.$$

Równość powyższa zachodzi (jak łatwo wyliczyć) dla $A = 1$,



Rysunek 7: Zadanie 2, wersja B. Rysunek formy kwadratowej podanej w zadaniu.



Rysunek 8: Zadanie 4, wersja B. Figura, której pole należy wyznaczyć.

$B = -1, C = 0$.

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2+x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x,$$

ale

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|,$$

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{c} y = \sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ \mathrm{d}y = \sqrt{\frac{4}{3}}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}x = \sqrt{\frac{3}{4}}\mathrm{d}y \end{array} \right| = \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{4}}\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} y =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right),$$

a więc

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2+x}\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + C.$$

4. Na rysunku 8 narysowana jest figura której pole należy wyznaczyć. Punkty przecięcia paraboli z prostą można wyliczyć z układu równań

$$\left\{\begin{array}{l} y - x^2 + 2x - 2 = 0 \\ 2x - y + 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 2 \\ y = 2x + 2 \end{array}\right. \Rightarrow x^2-2x+2 = 2x+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 4\}.$$

Szukane pole wyraża się więc całką

$$\int_0^4 \left[(2x+2) - \left(x^2-2x+2\right)\right]\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(4x - x^2\right)\mathrm{d}x = \left(2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 2\cdot 16 - \frac{1}{3}(64) = \frac{32}{3}.$$

5. Zadanie to zostanie rozwiązane w biegunowym układzie współrzędnych.

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int r^2 \rho(r) \mathrm{d}S$$

W układzie biegunowym element powierzchni

$$\mathrm{d}S = r\mathrm{d}\phi \mathrm{d}r,$$

więc

$$I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_a^b \mathrm{d}r r^3 \rho(r) = 2\pi \int_a^b \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+1}}.$$

Do obliczenia tej całki można wykorzystać podstawienie Eulera, ale prościej jest zignorować wskazówkę i zastosować podstawienie (a poza tym funkcję pierwotną bardzo łatwo w tym przypadku odgadnąć)

$$I = 2\pi \int_a^b \frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+1}} = \left| \begin{array}{c} x = r^2+1 \\ \mathrm{d}x = 2r\mathrm{d}r \end{array} \right| = \pi \int_{a^2+1}^{b^2+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} =$$

$$= \pi\, 2\sqrt{x}\Big|_{a^2+1}^{b^2+1} = 2\pi\left(\sqrt{b^2+1} - \sqrt{a^2+1}\right).$$