06.04.2005

Rozwiązania zadań z I kolokwium z matematyki 2L

1. (a) $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & a & 5 \end{pmatrix} = a-2$, wektory będą liniowo zależne gdy $a-2=0$, czyli dla $a=2$.

   (b) Dwa wektory są liniowo zależne, jeżeli istnieje $\alpha \in \mathbb{C}$ takie, że

   $$(1+\mathrm{i}, 2-3\,\mathrm{i}, a+5) = \alpha(a, 5-\mathrm{i}, 3+7\,i). \tag{1}$$

   Porównując drugie współrzędne otrzymuje się

   $$\alpha = \frac{2-3\,\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}},$$

   więc dla pozostałych współrzednych muszą zachodzić równania

   $$1+\mathrm{i} = \frac{2-3\,\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}\,a \Rightarrow (1+\mathrm{i})(5-\mathrm{i}) = (2-3\mathrm{i})a \Rightarrow a = \frac{6+4\,\mathrm{i}}{2-3\,i} = 2\,\mathrm{i},$$

   $$a+5 = \frac{2-3\,\mathrm{i}}{5-\mathrm{i}}(3+7\,\mathrm{i}) \Rightarrow a+5 = 5+2\,\mathrm{i} \Rightarrow a = 2\,\mathrm{i}.$$

   Dla $a = 2\,\mathrm{i}$ spełnione jest równanie (1), więc wektory są liniowo zależne.

   (c) $\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & a \\ 2 & a & 2 \\ -3 & 0 & a \end{pmatrix} = 8a^2-2a-6$. Wektory będą liniowo niezależne, gdy $8a^2-2a-6=0$, czyli dla $a=1$ lub $a=-\frac{3}{4}$.

2. Macierz jest hermitowska dla

$$a = \mathrm{i}, \qquad b = -\mathrm{i}, \qquad c = 0.$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -\lambda & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 = -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),$$

$$\lambda_1 = 1:$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

łatwo odgadnąć $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1)$,

$$\lambda_2 = -1 :$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

można odgadnąć (lub rozwiązać) $\mathbf{v}_2 = (1, 2\,\mathrm{i}, 1)$,

$$\lambda_3 = 2 :$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & -2 & \mathrm{i} \\ 0 & -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

można odgadnąć $\mathbf{v}_3 = (1, -\mathrm{i}, 1)$.

3. Niech $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$.

$$[(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}), (\vec{y} \cdot \vec{\sigma})]_+ = [x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3, y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 + y_3\sigma_3]_+ =$$

$$= x_1y_1[\sigma_1, \sigma_1]_+ + x_1y_2[\sigma_1, \sigma_2]_+ + x_1y_3[\sigma_1, \sigma_3]_+ +$$

$$+ x_2y_1[\sigma_2, \sigma_1]_+ + x_2y_2[\sigma_2, \sigma_2]_+ + x_2y_3[\sigma_1, \sigma_3]_+ +$$

$$+ x_3y_1[\sigma_3, \sigma_1]_+ + x_3y_2[\sigma_3, \sigma_2]_+ + x_3y_3[\sigma_1, \sigma_3]_+.$$

Dla $i \neq j$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = \sigma_i\sigma_j - \sigma_i\sigma_j = 0,$$

a

$$[\sigma_i, \sigma_i] = \sigma_i\sigma_i + \sigma_i\sigma_i = 2\sigma_i^2 = 2\mathbb{1}.$$

($\mathbb{1}$ oznacza macierz jednostkową 2×2) Podstawiając znalezione antykomutatory otrzymuje się

$$[(\vec{x} \cdot \vec{\sigma}), (\vec{y} \cdot \vec{\sigma})]_+ = 2x_1y_1\mathbb{1} + 2x_2y_2\mathbb{1} + 2x_3y_3\mathbb{1} = 2(\vec{x} \cdot \vec{y})\mathbb{1}$$

4. (a) Jądro przekształcenia zadane jest poprzez wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\left\{ \begin{aligned} y + z &= 0 \\ -y - z &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -t \\ z &= t \end{aligned} \right. ,$$

dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Zatem

$$\ker A = \mathrm{lin}\{(0,-1,1)\}.$$

Bazą jądra jest wektor $\mathbf{v}_1 = (0,-1,1)$. Jako bazę przestrzeni ortogonalnej do jądra można przyjąć dwa dowolne liniowo niezależne wektory prostopadłe do $\mathbf{v}_1$, np.

$$\mathbf{v_2} = (0,1,1), \qquad \mathbf{v_3} = (1,0,0).$$

(b) Kolumnami macierzy przejścia są współrzędne wektorów nowej bazy zapisane w starej bazie, a więc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Jak łatwo wyliczyć

$$A\mathbf{v}_1 = (0,0,0) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3,$$

$$A\mathbf{v}_2 = (2,-2,0) = 1\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3,$$

$$A\mathbf{v}_3 = (0,0,1) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3.$$

A więc w nowej bazie przekształcenie liniowe ma macierz

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (a) $\det \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 8 & -15 \end{pmatrix} = 170$. Wektory są liniowo niezależne.

(b)

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{9} = 3,$$

$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17,$$

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right),$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, \frac{8}{17}, -\frac{15}{17}\right).$$

(c)

$$\cos\alpha_{12} = \frac{(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3},$$

$$\cos\alpha_{13} = \frac{(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{-60}{5\cdot 17} = -\frac{12}{17},$$

$$\cos\alpha_{23} = \frac{(\mathbf{v}_2|\mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_2\|\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{-46}{3\cdot 17} = -\frac{46}{51}.$$

(d)

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_1 = \Big(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\Big),$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1|\mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1}{\|\mathbf{v}_2 - (\mathbf{e}_1|\mathbf{v}_2)\mathbf{e}_1\|} = \frac{(1,-2,2) - 1\cdot\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)}{\|(1,-2,2) - 1\cdot\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right)\|} =$$

$$= \frac{\left(\frac{8}{5}, -2, \frac{6}{5}\right)}{\|\left(\frac{8}{5}, -2, \frac{6}{5}\right)\|} = \frac{\left(\frac{8}{5}, -2, \frac{6}{5}\right)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{10}\right),$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1|\mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2|\mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{v}_3 - (\mathbf{e}_1|\mathbf{v}_3)\mathbf{e}_1 - (\mathbf{e}_2|\mathbf{v}_3)\mathbf{e}_2\|} =$$

$$= \frac{(0,8,-15) + 12\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) + \frac{17\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{10}\right)}{\|(0,8,-15) + 12\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{4}{5}\right) + \frac{17\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{10}\right)\|} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}\right)}{\|\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}\right)\|} = \frac{\left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{10}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(-\frac{2\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{10}\right).$$