08.03.2005

Zadania domowe z matematyki 2L
seria 1

1. Dwa wektory $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ nazywamy równoległymi jeżeli istnieje skalar $a > 0$ taki, że $\mathbf{v} = a \cdot \mathbf{w}$, a antyrównoległymi jeżeli $a < 0$.
   (a) Wykazać, że kąt pomiędzy dwoma wektorami równoległymi wynosi $0°$.
   (b) Wykazać, że kąt pomiędzy dwoma wektorami antyrównoległymi wynosi $180°$.

2. Dla jakiej wartości parametru a poniższe wektory są liniowo zależne?
   (a) $(1, 4, 5),\ (1, a, -2),\ (2, 4, 3)$,
   (b) $(1, 3, -2),\ (2, a, 0),\ (a, 6, -2)$,
   (c) $(1, 8, 3, 5, 6),\ (2, 5, 6, -2, 1),\ (5, 6a, 5a, 1, 8)$.

3. Sprawdzić czy poniższe przestrzenie są przestrzeniami wektorowymi.
   (a) $\mathbf{R}^2$ ze standardowym dodawaniem i mnożeniem $a \cdot (x, y) = (ax, 0)$.
   (b) Zbiór wielomianów stopnia co najwyżej 4 spełniających warunek $w(2) = 2$ ze standardowym dodawaniem i mnożeniem przez skalar.
   (c) Zbiór funkcji ciągłych określonych na odcinku $[-1, 1]$ ze standardowym dodawaniem i mnożeniem przez skalar, spełniających warunek $\sin(f(0)) = 0$.

4. W $\mathbf{R}^4$ dane są dwa wektory $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$ i $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Znormalizować i uzupełnić do bazy ortonormalnej te wektory gdy iloczyn skalarny
   (a) jest standardowy, czyli
   $$((x_1, x_2, x_3, x_4)|(y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$
   (b) jest zadany wzorem
   $$((x_1, x_2, x_3, x_4)|(y_1, y_2, y_3, y_4)) =$$
   $$= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 2x_4y_4.$$

5. Sprawdzić, czy podane wektory stanowią bazę w przestrzeni wektorowej V i przedstawić wektor $\mathbf{x}$ w tej bazie

   (a) $V = \mathbf{R}^3$, $\mathbf{e}_1 = (1, 8, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (1, -6, 1)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 3, 4)$, $\mathbf{x} = (3, 5, 13)$,

   (b) $V = \mathbf{R}^5$, $\mathbf{e}_1 = (1, 5, 8, -2, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (1, 1, -1, 2, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (4, 5, 7, 0, 1)$, $\mathbf{e}_4 = (6, 9, 6, 1, 0)$, $\mathbf{e}_5 = (2, 6, 4, 0, 0)$, $\mathbf{x} = (4, 7, 11, -3, 0)$,

   (c) $V = \{$*Przestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej 2*$\}$, $\mathbf{w}_1 = 2x^2 + x + 1$, $\mathbf{w}_2 = 2x + 2$, $\mathbf{w}_3 = 3x^2 + x$, $\mathbf{x} = x$.

6. Macierz M nazwyamy symetryczną jeżeli $M^T = M$, a antysymetryczną jeżeli $M^T = -M$.

   (a) Pokazać, że macierze symetryczne 3×3 tworzą podprzestrzeń wektorową przestrzeni $\mathbf{M}_{3\times 3}$ wszystkich macierzy 3×3.

   (b) Pokazać, że macierze antysymetryczne 3×3 tworzą podprzestrzeń wektorową przestrzeni $\mathbf{M}_{3\times 3}$.

   (c) Znaleźć bazę przestrzeni macierzy symetrycznych 3×3 i określić jej wymiar.

   (d) Znaleźć bezę przestrzeni macierzy antysymetrycznych 3×3 i określić jej wymiar.

   (e) Udowodnić, że istnieje tylko jedna macierz 3×3 równocześnie symetryczna i antysymetryczna. Jaka to macierz?

   (f) Uzasadnić, że dowolną macierz 3×3 można przedstawić jako sumę macierzy symetrycznej i antysymetrycznej.

7. Dane są trzy wektory

$$\mathbf{v_1} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad \mathbf{v}_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

   (a) Sprawdzić, że kąt pomiędzy dowolnymi dwoma spośród nich wynosi $60°$.

   (b*) W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ znaleźć cztery unormowane wektory takie, że kąt pomiędzy dowolnymi dwoma spośród nich wynosi $60°$.

Piotr Nowakowski