18.03.2005

Zadania domowe z matematyki 2L
seria 2

1. Zbadać, czy poniższe przekształcenia są liniowe. Jeżeli tak, to podać ich macierze w bazach standardowych ($\mathbf{W}_n$ oznacza przestrzeń wektorową wielomianów stopnia co najwyżej n nad ciałem $\mathbf{R}$ ze standardowym dodawaniem i mnożeniem przez skalar)

   (a) $\mathbf{T} : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4, \mathbf{T}(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_3, x_2, x_1)$,

   (b) $\mathcal{A} : \mathbf{W}_3 \to \mathbf{W}_3, \mathcal{A}(w(x)) = (x+1)w'(x)$,

   (c) $\mathbf{S} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^4, \mathbf{S}(x) = (x, 2x, 3x, x+1)$,

   (d) $\mathcal{T} : \mathbf{W}_1 \to \mathbf{W}_1, \mathcal{T}w(x) = w(w(x))$,

   (e) $\mathbf{A} : \mathbf{W}_3 \to \mathbf{R}^4, \mathbf{A}w(x) = (w(-1), w(0), w(1), w(2))$.

2. Niech $\mathcal{L}$ oznacza przestrzeń wszystkich zbieżnych ciągów $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach rzeczywistych. W przestrzeni tej można zdefiniować dodawanie i mnożenie przez liczbę rzeczywistą

$$(a+b)_n = a_n + b_n, \qquad (\alpha \cdot a)_n = \alpha a_n.$$

   (a) Pokazać, że $\mathcal{L}$ z tak zdefiniowanymi działaniami jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

   (b) Uzasadnić, że $\dim \mathcal{L} = \infty$.

   (c) Zdefiniowano operator $\mathbf{T} : \mathcal{L} \to \mathbf{R}$

$$\mathbf{T}\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

   Pokazać że jest to przekształcenie liniowe.

3. Znaleźć macierz transformacji z bazy B do bazy B' w poniższych przypadkach

   (a) $B = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$,
   $B' = \{(2,4,0), (0,0,4), (4,2,0)\}$, w przestrzeni wektorowej $\mathbf{R}^3$,

   (b) $B = \{(1,4,-1), (5,1,-2), (-1,-3,1)\}$,
   $B' = \{(3,1,3), (2,0,-2)(6,8,9)\}$, w przestrzeni $\mathbf{R}^3$,

(c) $B = \left\{\frac{1}{2}(1-x-x^2-x^3), \frac{1}{2}(1-x+x^2+x^3),\right.$
$\left.\frac{1}{2}(1+x-x^2+x^3), \frac{1}{2}(1+x+x^2-x^3)\right\}$,
$B' = \{1, x-1, x^2-x, x^3-x^2\}$, w przestrzeni $\mathbf{W}_3$.

4. Znaleźć w bazie standardowej macierz przekształcenia liniowego $\Pi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będącego rzutem prostopadłym na płaszczyznę $x+y+z=0$.

5. Znaleźć w bazie standardowej macierz przekształcenia liniowego $\mathcal{O} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będącego obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ względem prostej rozpiętej przez wektor $(1,1,1)$. *Uwaga: możliwe są dwa różne rozwiązania!*

6. Znaleźć jądro i obraz przekształceń liniowych zadanych w bazach standardowych następującymi macierzami

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \\ 8 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2\mathrm{i} & 2 \\ 2+3\mathrm{i} & -1+5\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} & 3-\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 5-\mathrm{i} & -1-5\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

7. Dla jakich wartości parametru a obrazem przekształcenia liniowego $T : \mathbf{R}_3 \to \mathbf{R}_3$ nie jest cała przestrzeń $\mathbf{R}^3$?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & a \\ 2 & 2 & 0 \\ a & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

8. Przekształcenie liniowe $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ ma w bazie

$$B = \{(1,0,1), (0,2,1), (1,2,0)\}$$

macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć macierz tego przekształcenia w bazie kanonicznej. Jakiej operacji geometrycznej odpowiada to przekształcenie?

Zadania dostępne są także na stronie internetowej
`www.fuw.edu.pl/~pionow/mat2l`

Piotr Nowakowski