

Zadania domowe z matematyki 2L seria 3

1. Znaleźć wartości i wektory własne poniższych macierzy. Podać transformację diagonalizującą.

$$\begin{pmatrix} -24 & -30 & -6 \\ 15 & 19 & 5 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 + \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 7 & -4 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 9 + i & 4 & -16 \\ -4 & i - 5 & 16 \\ 2 & 0 & i - 1 \end{pmatrix}.$$

2. Obliczyć $\exp(i\alpha\sigma_x)$.
3. Obliczyć A^{2005} dla

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4. Obliczyć \sqrt{A} dla

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Podać wszystkie 4 możliwe rozwiązania.

5. Przekształcenie liniowe zadane w bazach standardowych macierzą

$$S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

jest odbiciem lustrzanym względem pewnej płaszczyzny. Znaleźć wektory rozpinające tę płaszczyznę.

6. Przekształcenie liniowe ma w bazach standardowych następującą macierz

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{3}}{5} & \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{4}{5} + \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Pokazać że jest to obrót w \mathbf{R}^3 , czyli że jest to przekształcenie ortogonalne o wyznaczniku $+1$.
- (b) Znaleźć prostą wokół której wykonywany jest obrót.
- (c) Znaleźć kąt obrotu.

7. Niech V będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni funkcji ciągłych nad \mathbf{C} o bazie

$$B = \{\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \sin(3x), \cos(3x)\}.$$

Operator liniowy $T : V \rightarrow V$ zadany jest formułą

$$Tf(x) = i \frac{df(x)}{dx}.$$

- (a) Zapisać macierz operatora T w bazie B .
- (b) Czy otrzymana macierz jest ortogonalna, unitarna, symetryczna, hermitowska?
- (c) Znaleźć wartości własne i wektory własne tej macierzy.
- (d) Jakim funkcjom odpowiadają znalezione wektory?

8. Znaleźć ortonormalny układ wektorów własnych macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadania dostępne są także na stronie internetowej
www.fuw.edu.pl/~pionow/mat21

Piotr Nowakowski