

Zadania domowe z matematyki 2L seria 5

1. Obliczyć całki

$$(a) \int x e^{-x^2} dx, \quad (b) \int x^3 e^{-x^2}, \quad (c) \int \sin x \cos x dx,$$

$$(d) \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (e) \int \sin x \sin(2x) dx, \quad (f) \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

2. Obliczyć całki z funkcji wymiernych

$$(a) \int \frac{3x+7}{x^2+4x+3} dx, \quad (b) \int \frac{x+1}{2x^2+4x+5} dx, \quad (c) \int \frac{x^4}{x^2-1} dx,$$

$$(d) \int \frac{x^2+x+2}{x^4-1} dx, \quad (e) \int \frac{x^4+22x^3+43x^2+40x+17}{x^5+7x^4+18x^3+23x^2+17x+6} dx.$$

3. Obliczyć całki z funkcji niewymiernych

$$(a) \int \sqrt{\frac{2x-1}{3x+2}} dx, \quad (b) \int \sqrt[3]{\frac{5x-1}{2x+5}} dx,$$

$$(c) \int \frac{dx}{\sqrt{x-1} + (x-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad (d) \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}.$$

4. Obliczyć całki

$$(a) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}, \quad (b) \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+3x+2}}, \quad (c) \int \sqrt{x^2+3x+2} dx.$$

5. Policzyc z definicji całki Riemanna

$$\int_0^\pi \sin x dx.$$

Wskazówka: Wykorzystać (udowodnić?) następujący wzór

$$\sum_{k=0}^n \sin(kx) = \frac{1}{2} \sin(nx) + \frac{1}{2} \sin x \frac{1 - \cos(nx)}{1 - \cos x}.$$

6. Korzystając z definicji całki Riemanna udowodnić wzory

$$\operatorname{arctg} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^2}{n^2 + i^2 x^2},$$

$$\operatorname{arcsin} x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{\sqrt{n^2 - i^2 x^2}},$$

$$\ln x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n + i(x-1)}.$$

7. Obliczyć całki oznaczone

$$(a) \int_0^\pi \sin x dx, \quad (b) \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+x+1} dx, \quad (c) \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx,$$

$$(d) \int_0^1 \frac{2x+3}{x^3-3x^2+4} dx, \quad (e) \int_0^5 2^x dx, \quad (f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin^2 x) \cos^3 x}{\sin x + 1} dx.$$

8. Dana jest parabola $y = -x^2 + 3$. Obliczyć

- (a) pole obszaru ograniczonego parabolą i osią x ,
- (b) długość łuku paraboli w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych,
- (c) objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu części paraboli leżącej w półpłaszczyźnie $x \geq 0$ wokół osi x ,
- (d) objętość bryły otrzymanej w wyniku obrotu tej samej części paraboli wokół osi y .

9. Tort w cukierni o wadze 3 kg ma kształt elipsy o osiach długości 10 cm i 20 cm. Sprzedawca chce zapakować ten tort do pudełka w kształcie kwadratu o boku 10 cm, w tym celu odkroił z obu stron dwa identyczne kawałki. Cięcia były wykonywane równoległe do krótszej osi elipsy. Ile waży zapakowana część tortu?

10. Kulę o równaniu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

podzielono na dwie części płaszczyzną $x = 1$. Jakie są objętości obu otrzymanych części?

Zadania dostępne są także na stronie internetowej

www.fuw.edu.pl/~pionow/mat21

Piotr Nowakowski