

Zadania domowe z matematyki 2L seria 6

1. Obliczyć (o ile są zbieżne) całki niewłaściwe

$$(a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \, dx, \quad (b) \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} \, dx, \quad (c) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(d) \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) dx.$$

2. Zbadać zbieżność całek niewłaściwych

$$(a) \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx, \quad (b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4+1}} dx,$$

$$(d) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad (e) \int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx, \quad (f) \int_{-\infty}^0 \frac{\exp x}{\sqrt{x}}.$$

3. Jednorodna kula ma promień R i masę M .

- (a) Obliczyć gęstość tej bryły ρ .
- (b) Wyznaczyć moment bezwładności tej kuli względem prostej przechodzącej przez jej środek (jako funkcję M i R).
- (c) Rozważaną kulę wydrążono w środku usuwając z niej koncentrycznie kulę promieniu $r < R$ (środki obu kul się pokrywają). Ile wynosi masa m takiej bryły (jako funkcja R , r i ρ)?
- (d) Obliczyć moment bezwładności wydrążonej kuli względem prostej przechodzącej przez jej środek (skorzystać z addytywności momentu bezwładności).
- (e) Wykonać przejście graniczne $r \rightarrow R$ przy ustalonej masie wydrążonej kuli (więc ρ musi się zmieniać!) by wyznaczyć wzór na moment bezwładności sfery.

4. Cienka obręcz o promieniu R ma niejednorodną gęstość liniową (masa na jednostkę długości)

$$\eta(\phi) = \eta_0 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \eta_0 = \text{const}$$

(ϕ to kąt który opisuje punkty okręgu tak jak w biegunowym układzie współrzędnych).

- (a) Jaka jest całkowita masa obręczy?
 - (b) Jaki jest moment bezwładności obręczy względem prostej przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do jej płaszczyzny?
 - (c) Jaki jest moment bezwładności obręczy względem dowolnej prostej przechodzącej przez jej środek i leżącej w jej płaszczyźnie?
 - (d) Znaleźć dwie proste dla których moment bezwładności wyliczony w poprzednim punkcie jest największy i najmniejszy. Jaki jest kąt pomiędzy tymi prostymi?
5. Niewielkie ciało zostało ogrzane do temperatury T_0 i umieszczone w próżni. Po minucie zmierzono jego temperaturę otrzymując $T_1 = \frac{1}{2}T_0$. Po jakim czasie ciało to osiągnie temperaturę $T_2 = \frac{1}{4}T_0$? Należy przyjąć, że energia ciała jest proporcjonalna do jego energii wewnętrznej, a utrata energii wewnętrznej następuje jedynie na skutek promieniowania cieplnego, czyli proporcjonalnie to czwartej potęgi chwilowej temperatury ciała. Wszystkie temperatury w tym zadaniu mierzone są w kelwinach.
6. Nieskończenie długa, prosta nie naładowana jest równomiernie ładunkiem elektrycznym o gęstości liniowej (ładunek na jednostkę długości) η . Wyznaczyć natężenie pola elektrycznego w odległości r od nici.
7. Wyprowadzić wzór na objętość stożka o wysokości h i promieniu podstawy r

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Zadania dostępne są także na stronie internetowej
www.fuw.edu.pl/~pionow/mat21

Piotr Nowakowski