25.05.2005

Zadania domowe z matematyki 2L
seria 7

1. Obliczyć (o ile są zbieżne) sumy szeregów

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right)$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1} \right)$,

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n$,

   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 4^{-2n+1}$, (f) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

2. Zbadać zbieżność poniższych szeregów liczbowych

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$, (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$,

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n)^{-2n}$, (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n^2 - 3n + 1}{5n^5 + 6n^2 + n + 5}$,

   (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$, (f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$.

3. Pokazać, że jeżeli ciąg a_n ma wszystkie wyrazy dodatnie i szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to również szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny.

4. Podać przykład ciągu a_n takiego, że

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest zbieżny,

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ jest rozbieżny.

5. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągów funkcyjnych

   (a) $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \sin nx,\ x \in \mathbb{R}$,

   (b) $f_n(x) = \dfrac{nx}{nx^2+1},\ x \in \mathbb{R}$,

   (c) $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2} \mathrm{e}^x,\ x \in (-\infty, 2]$,

   (d) $f_n(x) = \dfrac{x}{n},\ x \in \mathbb{R}$.

6. Czy funkcja
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{n^4 + x^2},$$
jest ciągła? Wskazówka: Pokazać, że f jest ciągła dla $x \in [-M, M]$ dla dowolnego dodatniego M.

7. Niech $f_n(x) = \dfrac{x + \sqrt{\frac{3}{n}}}{1 + nx^2}$, dla $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Znaleźć granicę punktową $f(x)$ ciągu funkcji $f_n(x)$.

   (b) Pokazać, że ciąg $f_n(x)$ zbiega jednostajnie do swojej granicy.

   (c) Czy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$?

8. Wyznaczyć promień zbieżności szeregów potęgowych $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dla
$$\text{(a) } a_n = \frac{1}{n}, \quad \text{(b) } a_n = n!, \quad \text{(c) } a_n = n, \quad \text{(d) } a_n = 2^n.$$

9. Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln(x+1)$ w szereg potęgowy. Zbadać promień zbieżności oraz zbieżność na końcach przedziału.

10. Funkcja Bessela $J_1(x)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego
$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + \left(x^2 - 1\right) J_1(x) = 0,$$
$$J_1(0) = 1, \qquad J_1'(0) = 0.$$
Znaleźć wzór na współczynniki rozwinięcia tej funkcji na szereg potęgowy $J_1(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Zadania dostępne są także na stronie internetowej
`www.fuw.edu.pl/~pionow/mat2l`

Piotr Nowakowski