01.06.2005

Zadania domowe z matematyki 2L
seria 8

1. Zaznaczyć na układzie współrzędnych dziedziny poniższych funkcji

   (a) $f(x,y) = \ln(xy+1)$, (b) $f(x,y) = \mathrm{tg}(x+y)$,

   (c) $f(x,y) = \arcsin\left(x^2+y^2-2\right)$, (d) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{\mathrm{e}^t \mathrm{d}t}{t^2-1}$.

2. Obliczyć granicę (o ile istnieje) funkcji $f(x,y)$ w punkcie P

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, dla $P=(0,0)$,

   (b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{\arcsin(x-y)}$, dla $P=(1,1)$,

   (c) $f(x,y) = x^y$, dla $P=(0,0)$,

   (d) $f(x,y) = \mathrm{Re}\left[\exp\left(\dfrac{1}{x+\mathrm{i}\,y}\right)\right]$, dla $P=(0,0)$.

3. Wyznaczyć pochodne kierunkowe w kierunku dowolnego wektora w punkcie $(1,1)$ funkcji $f(x,y) = x^y - y^x$.

4. Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji

   (a) $\dfrac{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}{x^3-y^3}$, (b) $\sin\left(\sin\left(x^2+y^2\right)\right)$, (c) $\sqrt{x^y}$,

   Sprawdzić, czy $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

5. Dana jest funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ \alpha & \text{dla } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Dla jakiej wartości parametru α w punkcie $(0,0)$ istnieje pochodna kierunkowa w kierunku wektora $(1,0)$? Ile ona wynosi?
   (b) Dla jakiej wartości parametru α w punkcie $(0,0)$ istnieje pochodna kierunkowa w kierunku wektora $(0,1)$? Ile ona wynosi?

6. Powierzchnia w $\mathbb{R}^3$ zadana jest równaniem

$$z = x^2 - y^2.$$

   (a) Jaką nazwę ma taka powierzchnia?
   (b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do danej powierzchni w dowolnym punkcie.
   (c) Jaka krzywa powstaje na przecięciu płaszczyzny stycznej z rozważaną powierzchnią?
   (d) Jaką krzywą otrzyma się na przecięciu płaszczyzny stycznej do kuli z tą kulą?
   (e) Podać przykład ciągłej funkcji jednej zmiennej $f(x)$ dla której styczna poprowadzona w dowolnym punkcie przecina tą funkcję w nieskończonej ilości punktów.

7. Dany jest układ spoczywających ładunków elektrycznych. Udowodnić, że w dowolnym punkcie wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ jest prostopadły do powierzchni ekwipotencjalnej przechodzącej przez ten punkt.

8. Rozwinąć w szereg Taylora do czwartego rzędu poniższe funkcje wokół punktu $(0,0)$

$$\text{(a) } \arcsin(x \sin y), \quad \text{(b) } \frac{1}{x^2+y^2+1}, \quad \text{(c) } \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}\,y}\right).$$

9. Określić dziedzinę, a następnie znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}\,\frac{x+y}{x^2+y^2+1}.$$

Zadania dostępne są także na stronie internetowej
`www.fuw.edu.pl/~pionow/mat2l`

Piotr Nowakowski