Kolokwium I (23.03.2015.)

Mechanika kwantowa dla inzynierii nanostruktur oraz energetyki i chemii jadrowej

1. Niech wektory $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$ stanowia baze ortonormalna w dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej.

   (A) Zdefiniujmy operator $\hat{\sigma}_y$ (tzw. operator wzdluz osi y) taki ze

   $$\begin{aligned} \hat{\sigma}_y|e_1\rangle &= -i|e_2\rangle, \\ \hat{\sigma}_y|e_2\rangle &= i|e_1\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

   - Znalezc macierz operatora $\hat{\sigma}_y$ w bazie skladajacej sie z wektorow $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$.
   - Czy macierz ta jest hermitowska?
   - Korzystajac z zapisanej macierzowo postaci operatora $\hat{\sigma}_y$, znalezc jego wartosci i wektory wlasne.
   - Znalezc unormowane wektory wlasne.
   - Sprawdzic bezposrednim rachunkiem, czy powyzsze wektory wlasne operatora sa ortogonalne.

   (B) Zdefiniujmy operator $\hat{\sigma}_z$ (tzw. operator spinu wzdluz osi z) taki ze

   $$\begin{aligned} \hat{\sigma}_z|e_1\rangle &= |e_1\rangle, \\ \hat{\sigma}_z|e_2\rangle &= -|e_2\rangle. \end{aligned} \tag{2}$$

   - Znalezc macierz operatora $\hat{\sigma}_z$ w bazie skladajacej sie z wektorow $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$.
   - Czy macierz ta jest hermitowska?
   - Korzystajac z zapisanej macierzowo postaci operatora $\hat{\sigma}_z$, znalezc jego wartosci i wektory wlasne.
   - Znalezc unormowane wektory wlasne.
   - Sprawdzic bezposrednim rachunkiem, czy powyzsze wektory wlasne operatora sa ortogonalne.

   (C) Znajac macierz operatora $\hat{\sigma}_y$ oraz $\hat{\sigma}_z$ w bazie skladajacej sie z wektorow $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$, obliczyc komutator operatorow $[\hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z]$.

2. Dany jest wektor stanu:

   $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\psi_2\rangle \tag{3}$$

- Wiedzac, ze w reprezentacji polozeniowej

$$\langle x|\psi_1\rangle \equiv \psi_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(x-2)^2}{4}} \tag{4}$$

oraz

$$\langle x|\psi_2\rangle \equiv \psi_2(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{x^2}{4}} \tag{5}$$

zapisz postac funkcji falowej $\psi(x)$.
- Bezposrednim rachunkiem sprawdz czy stan $|\psi\rangle$ jest unormowany, tj. czy $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.
- Oblicz wartosc srednia operatora polozenia oraz operatora pedu w stanie $|\psi\rangle$.

Wskazowka: Operator polozenia (pedu) w reprezentacji polozeniowej to $\langle x'|\hat{x}|x\rangle = x\delta(x-x')$. $[\langle x'|\hat{p}|x\rangle = -i\frac{h}{2\pi}\frac{d}{dx}\delta(x-x')]$, odpowiednio. Calka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$.

3. W chwili poczatkowej (tj. $t = 0$) czastka poruszajaca sie w nieskonczenie glebokiej studni potencjalu,

$$V_\infty(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < -a \\ 0 & , \quad -a \leqslant x \leqslant a \\ \infty & , \quad a < x \end{cases} , \tag{6}$$

znajdowala sie w stanie opisanym funkcja falowa

$$\Psi(x, t=0) \equiv \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{3a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) + \frac{1}{\sqrt{3a/2}} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right). \tag{7}$$

Wyznacz ewolucje funkcji falowej czastki.

Wskazowka 1: Stany wlasne i energie nieskonczonej studni:

$$E_n = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

$$\phi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2k\pi x}{2a}\right) \quad \text{gdy} \quad n = 2k \tag{9}$$

$$\phi_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right) \quad \text{gdy} \quad n = 2k+1 \tag{10}$$

Wskazowka 2: Liczac odpowiednie calki uzyj relacji:

$$2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y), \tag{11}$$

$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y), \tag{12}$$

$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y). \tag{13}$$