

Kolokwium II (20.04.2015.)

Mechanika kwantowa dla inżynierii nanostruktur oraz energetyki i chemii jądrowej (zadania 2. (D*) oraz 3. (D*) są nieobowiązkowe)

1. Znajdź reprezentacje macierzowe operatorów momentów pędu $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ oraz $\hat{L}_z$ dla stanów o orbitalnej liczbie kwantowej $l = 1$ i sprawdź ich relacje komutacji:

(A) Wylicz reprezentacje macierzowe operatora $\hat{L}_z$.

- Wypisz wszystkie stany własne $|l, m\rangle$ operatora $\hat{L}^2$ oraz $\hat{L}_z$, które mają $l = 1$.
- Zapisz działanie $\hat{L}_z$ na każdy z wypisanych powyżej stanów $|l, m\rangle$.
- Oblicz $\langle l', m' | \hat{L}_z | l, m \rangle$ pamiętając o ortogonalności stanów $|l, m\rangle$.
- Zapisz wyliczone elementy macierzowe w postaci macierzy.

(B) Kolejno wylicz reprezentacje macierzowe operatora $\hat{L}_x$ oraz $\hat{L}_y$.

- Najpierw zapisz działanie $\hat{L}_+$ oraz $\hat{L}_-$ na każdy z zapisanych powyżej stanów $|l, m\rangle$ korzystając z równania $\hat{L}_\pm |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$.
- Zapisz działanie $\hat{L}_x$ oraz $\hat{L}_y$ na każdy z wypisanych powyżej stanów $|l, m\rangle$ korzystając ze związku $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$.
- Oblicz $\langle l', m' | \hat{L}_x | l, m \rangle$ oraz $\langle l', m' | \hat{L}_y | l, m \rangle$ pamiętając o ortogonalności stanów $|l, m\rangle$.
- Zapisz wyliczone elementy macierzowe w postaci macierzy.

(C) Oblicz komutator macierzy reprezentujących operatory $\hat{L}_x$ oraz $\hat{L}_y$. Czy komutator ten jest proporcjonalny do macierzy reprezentującej operator $\hat{L}_z$? Czy można powiedzieć, że spełniony jest związek pomiędzy operatorami $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$? Odpowiedz uzasadnij.

2. Dany jest wektor stanu czastki

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|\phi_0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|\phi_1\rangle, \quad (1)$$

gdzie stan $|\phi_0\rangle$ jest stanem własnym Hamiltonianu oscylatora harmonicznego do energii $E_0 = \hbar\omega/2$ a $|\phi_1\rangle$ jest stanem własnym Hamiltonianu oscylatora harmonicznego do energii $E_1 = 3\hbar\omega/2$:

(A) Oblicz prawdopodobieństwo tego, że czastka będąca w stanie $|\psi\rangle$ jest w stanie podstawowym oscylatora harmonicznego.

(B) Oblicz średnią energię czastki będącej w stanie $|\psi\rangle$ – w tym celu należy obliczyć $\langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle$, gdzie $\hat{H}$ to Hamiltonian oscylatora harmonicznego.

(C) Oblicz średnie położenie czastki w stanie $|\psi\rangle$ używając reprezentacji położeniowej. Pamiętaj, że w reprezentacji położeniowej operator położenia to $\langle x' | \hat{x} | x \rangle = x\delta(x - x')$, a stany $|\phi_0\rangle$ oraz $|\phi_1\rangle$ są reprezentowane przez następujące funkcje falowe

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{-1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \quad (2)$$

gdzie dwa pierwsze wielomiany Hermite'a to:

$$H_0(x) = 1 \quad (3)$$

$$H_1(x) = x. \quad (4)$$

(D*) Przyjmując, że w chwili początkowej $t = 0$ cząstka znajduje się w stanie $|\psi\rangle$, wylicz ewolucję czasową $|\psi(t)\rangle$ oraz ewolucję średniego położenia w czasie.

Wskazówki: Całka $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$ gdy $a > 0$. Rozniczkując po parametrze a poprzedni wzór możesz wyliczyć pozostałe całki potrzebne w zadaniu. Całki oznaczone z funkcji nieparzystych po $x \in (-\infty, \infty)$ znikają.

3. Elektron w pewnym potencjale sferycznie symetrycznym jest opisany funkcją falową

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a_0} \right)^{3/2} e^{-r/a_0}, \quad (5)$$

gdzie a_0 to promień Bohra:

(A) Znajdź prawdopodobieństwo tego, że elektron znajduje się dokładnie w odległości jednego promienia Bohra od źródła potencjału sferycznie symetrycznego.

(B) Znajdź prawdopodobieństwo tego, że elektron znajduje się w odległości nie większej niż jeden promień Bohra od źródła potencjału sferycznie symetrycznego.

(C) Znajdź średnią odległość elektronu od źródła potencjału sferycznie symetrycznego.

(D*) Znajdź najbardziej prawdopodobną odległość elektronu od źródła potencjału sferycznie symetrycznego.

Wskazówki: Element całkowania na sferze o promieniu R to $R^2 \sin\theta d\theta d\phi$; element całkowania w kuli to $r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$, gdzie współrzędne sferyczne są zdefiniowane tak, że $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ a $\phi \in [0, 2\pi]$. Całka $\int x^n e^{cx} dx = e^{cx} \left(\frac{x^2}{c} - \frac{2x}{c^2} + \frac{2}{c^3} \right)$.