

Mechanika Klasyczna

Piotr Szańkowski

I. WSTĘP

Podstawowe pojęcia i definicje:

- Lagrangian układu opisanego zbiorem *uogólnionych współrzędnych* $\{q_i\}$:

$$\mathcal{L}(q_1, \dots, q_N; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N) = T(\dot{\vec{q}}) - V(\vec{q}) \quad (1)$$

- *Pęd uogólniony* sprzężony ze współrzędną uogólnioną q_i :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad (2)$$

- Hamiltonian (energia) układu:

$$\mathcal{H}(p_1, \dots, p_N; q_1, \dots, q_N) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (3)$$

gdzie \dot{q}_i jest wyrażona jako funkcja uogólnionych współrzędnych \vec{q} i uogólnionych pędów \vec{p} .

- Dynamika układu jest opisana równaniami Hamiltona, które są równoważne równaniom Newtona:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}, \end{aligned}$$

dla każdego i .

- Wielkość dynamiczną $A = A(q_1, \dots, q_N; p_1, \dots, p_N)$ nazywamy *stałą ruchu* gdy:

$$\frac{dA}{dt} = 0. \quad (4)$$

Przykładem stałej ruchu jest sam Hamiltonian układu (pod warunkiem, że układ jest izolowany).

II. OSCYLATOR HARMONICZNY

Definicja — Oscylatorem harmonicznym nazywamy cząstkę poruszającą się w parabolicznym potencjale:

$$V(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2, \quad (5)$$

który generuje siłę proporcjonalną do wychylenia cząstki z położenia równowagi

$$F = -\frac{\partial}{\partial q} V = -m\omega^2 q. \quad (6)$$

Przykładem oscylatora harmonicznego jest wahadło w polu grawitacyjnym, które wykonuje małe drgania wokół położenia równowagi.

Zastosowania — Model oscylatora znajduje szerokie zastosowania w opisie ruchu cząstek wokół ich położenia równowagi, tzw. *przybliżenie małych drgań*.

Położenie równowagi q_0 definiuje się jako położenie, w którym energia potencjalna jest minimalna:

$$q_0 : V(q_0) = \text{minimum.} \quad (7)$$

Rozwijając potencjał w szereg Taylora wokół tego punktu do najniższego nieznikającego rzędu (pierwsza pochodna V znika z warunku ekstremum) otrzymujemy potencjał oscylatora

$$V(q) \approx V(q_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \right) \Big|_{q_0} (q - q_0)^2, \quad (8)$$

przy czym $\partial^2 V / \partial q^2|_{q_0} > 0$ z warunku minimum.

Hamiltonian i równania ruchu — Lagrangian oscylatora harmonicznego jest dany przez:

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 \quad (9)$$

Latwo znajdujemy pęd uogólniony, który jest równy zwyczajnej definicji pędu (tzn. pęd = masa \times prędkość):

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \dot{q}, \quad (10)$$

tak więc Hamiltonian ma postać

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2. \quad (11)$$

Równania ruchu oscylatora:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{p}{m}, \\ \dot{p} &= -m \omega^2 q, \end{aligned}$$

eliminując p przy pomocy pierwszego równania dostajemy równanie Newtona z siłą $F = -m \omega^2 q$:

$$\ddot{q} = -\omega^2 q. \quad (12)$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$q(t) = q(0) \cos \omega t + \frac{\dot{q}(0)}{\omega} \sin \omega t. \quad (13)$$

Wielowymiarowy oscylator harmoniczny i separacja zmiennych — wyobraźmy sobie cząstkę poruszającą się wokół minimum trójwymiarowego potencjału $V(x, y, z)$. Rozwijamy potencjał w przybliżeniu małych drgań:

$$V(x, y, z) \approx V(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_{x_0} (x_{i0} - x_i)(x_{j0} - x_j), \quad (14)$$

macierz $\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j|_{x_0}$ jest dodatnio określona z warunku minimum. Przechodząc do odpowiedniego układu współrzędnych zawsze można “zdiagonalizować” potencjał:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &\rightarrow V(q_1, q_2, q_3) = V(\vec{q}_0) + \\ &\frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i^2} \right) \Big|_{q_0} (q_i - q_{i0})^2. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy częstości oscylatora $m \omega_i^2 \equiv \partial^2 V / \partial q_i^2|_{q_0}$, wtedy Hamiltonian przybierz postać

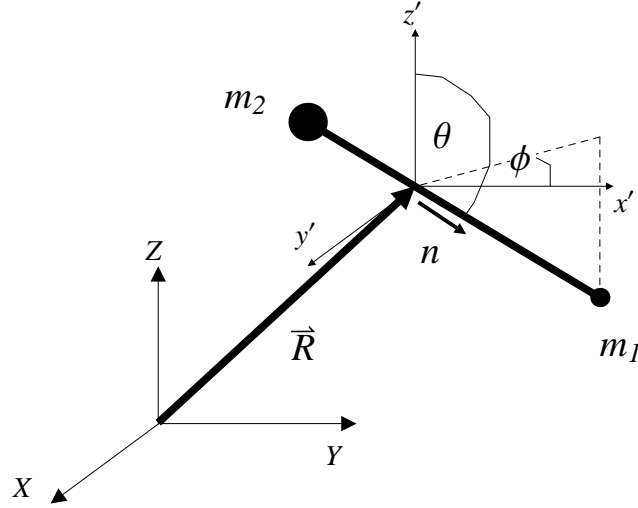
$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}) &= \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + \frac{1}{2} m \sum_i \omega_i^2 q_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathcal{H}_{1D}(p_i, q_i), \end{aligned} \quad (15)$$

gdzie \mathcal{H}_{1D} to Hamiltoniany jednowymiarowego oscylatora. Wypisując równania ruchu przekonamy się, że równania się rozprzęgły i możemy je rozwiązać dla każdej współrzędnej z osobna:

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= mp_i, \\ \dot{p}_i &= -m\omega_i^2 q_i.\end{aligned}$$

Ten przykład ilustruje ogólną własność równań ruchu, zwaną *separacją zmiennych*: jeśli Hamiltonian ma postać sumy czynników zależących od różnych zestawów zmiennych, $\mathcal{H}(p_1, q_1, \dots, p_M, q_M; p_{M+1}, q_{M+1}, \dots, p_{M+N}, q_{M+N}) = \mathcal{H}(p_1, q_1, \dots, p_M, q_M) + \mathcal{H}(p_{M+1}, q_{M+1}, \dots, p_{M+N}, q_{M+N})$, to równania ruchu rozprzęgną się.

III. SZTYWNY ROTATOR



Rysunek 1. Sztywny rotator.

Wstęp — Rotator sztywny to najprostszy model opisujący układ dwóch oddziałujących ze sobą cząstek. Zakłada się, że cząstki pozostają w stałej odległości, poza tym poruszają się swobodnie. Taka sztywna cząsteczka może wykonywać ruch translacyjny jako całość oraz obracać się swobodnie wokół jej środka masy.

Współrzędne środka masy — Energia kinetyczna rotatora jest dana przez

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 \quad (16)$$

Przechodzimy do układu *środku masy*:

$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M}, \quad (17)$$

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (18)$$

Warunek sztywności rotatora przekłada się na $|\vec{r}| = const..$ Jako współrzędne uogólnione wybieramy położenie środka masy $\{R_1, R_2, R_3\}$ oraz kąty $\{\theta, \phi\}$ określające kierunek wektora \vec{n} (patrz rysunek (1)). Z łatwością obliczamy, że

$$\dot{\vec{r}} = r\dot{\vec{n}} = r \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\phi \dot{\theta} - \sin\theta \sin\phi \dot{\phi} \\ \cos\theta \sin\phi \dot{\theta} - \sin\theta \cos\phi \dot{\phi} \\ -\sin\theta \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

co daje Lagrangian

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\vec{R}, \dot{\vec{R}}; \theta, \dot{\theta}; \phi, \dot{\phi}) &= T - V = \\ &= \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2)\end{aligned} \quad (20)$$

gdzie $\mu = m_1 m_2 / M$ - masa zredukowana.

Jak widzimy ruch środka masy odseparował się ruchu *wewnętrznych stopni swobody*. Ponieważ na rotator nie działa żadna zewnętrzna siła ruch środka masy nie zmieni się (Pierwsza zasada dynamiki Newtona). Co za tym idzie, zawsze możemy przejść do inercjalnego układu środka masy eliminując w ten sposób pierwszy człon z Lagrangianu.

Hamiltonian i równania ruchu — Znajdujemy uogólnione pędy:

$$\begin{aligned} p_\theta &= \mu r^2 \dot{\theta}, \\ p_\phi &= \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (21)$$

i obliczamy Hamiltonian

$$\mathcal{H}(p_\theta, \theta; p_\phi, \phi) = p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{p_\theta^2}{2\mu r^2} + \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2 \sin^2 \theta} \quad (22)$$

Obróćmy układ środka masy tak aby rotator wirował w płaszczyźnie XY , wtedy kąt $\theta = \pi/2$ i nie będzie się zmieniał. W przypadku takiego wyboru układu współrzędnych równania ruchu na współrzędną ϕ przyjmą postać:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{\mu r^2} = \frac{p_\phi}{I}, \\ \dot{p}_\phi &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

czyli p_ϕ jest stałą ruchu ($I = \mu r^2$ - moment bezwładności).

Moment pędu — Przypomnijmy definicję momentu pędu dla cząstki o masie μ :

$$\vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (24)$$

We współrzędnych sferycznych mamy, że z -owa składowa momentu pędu jest równa uogólnionemu pędowi związanemu z ϕ !

$$L_z = \mu r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = p_\phi. \quad (25)$$

A więc moment pędu jest stałą ruchu rotatora sztywnego.

Przy odrobinie algebra możemy łatwo pokazać, że kwadrat długości wektora momentu pędu jest równy:

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}, \quad (26)$$

czyli Hamiltonian rotatora (energia rotatora) jest równy jedna druga razy (moment pędu)²/(moment bezwładności):

$$\mathcal{H} = \frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I} \quad (27)$$

IV. NAWIASY POISSONA

Wstęp — Nawias Poissona wielkości dynamicznych $A(\vec{p}, \vec{q})$ i $B(\vec{p}, \vec{q})$ jest zdefiniowany jako:

$$\{A, B\} = \sum_i \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}. \quad (28)$$

Nawiasy Poissona są potężnym narzędziem służącym do badania ogólnych własności układów dynamicznych. Jednym z zastosowań jest poszukiwanie stałych ruchu. Zachodzi twierdzenie, że jeśli

$$\{A(p, q), \mathcal{H}\} = 0, \quad (29)$$

to $A(p, q)$ jest stałą ruchu.

Dowód twierdzenia o stałych ruchu — Korzystając z równań Hamiltona pokażemy, że

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, \mathcal{H}\}. \quad (30)$$

Dowód:

$$\frac{dA(t, p, q)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p}. \quad (31)$$

Z równań Hamiltona mamy, że $\dot{q} = \partial\mathcal{H}/\partial p$ i $\dot{p} = -\partial\mathcal{H}/\partial q$, a więc

$$\frac{\partial A}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial A}{\partial p} \dot{p} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} = \{A, \mathcal{H}\}, \quad (32)$$

co należało pokazać.

Energia jest zachowana — jeśli Hamiltonian układu nie zależy explicite od czasu (tzn, wszystkie pola sił są stałe w czasie) to

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \{\mathcal{H}, \mathcal{H}\} = \sum_i \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i} = 0, \quad (33)$$

co stanowi teść *prawa zachowania energii*.

Zachowanie momentu pędu — wcześniej widzieliśmy, że w czasie ruchu rotatora moment pędu jest zachowany. Obliczmy następujący nawias Poissona:

$$\{L^2, L_z\} = -\frac{\partial L^2}{\partial\phi} \frac{\partial L_z}{\partial p_\phi} = -\frac{\partial L^2}{\partial\phi} = 0. \quad (34)$$

Stąd wynika, że $\{L^2, L_x\} = \{L^2, L_y\} = 0$, ponieważ zawsze możemy obrócić układ współrzędnych w taki sposób, że $L_i \rightarrow L_z$. L^2 , jako kwadrat wektora, nie zmieni się przy takim obrocie. Tak więc wektor momentu pędu jest stałą ruchu rotatora.

Ogólniej, przy odrobinie algebry można pokazać, że energię kinetyczną cząstki poruszającą się w trzech wymiarach można zapisać jako

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2). \quad (35)$$

Jeśli dodatkowo założymy że cząstka porusza się w centralnym potencjale, tzn potencjale, który zależy tylko od odległości cząstki od początku układu współrzędnych: $V = V(|\vec{r}|)$, to Hamiltonian układu będzie miał postać

$$\mathcal{H} = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r), \quad (36)$$

gdzie p_r to pęd uogólniony związany z radialną współrzędną r . Ponieważ składowe momentu pędu zależą tylko od współrzędnych kątowych mamy, że

$$\{L_i, \mathcal{H}\} = \frac{1}{2mr^2} \{L_i, L^2\} = 0. \quad (37)$$

A więc, w czasie ruchu w polu centralnym moment pędu jest wielością zachowaną!