

Zad. domowe nr 5: 10.04.

Oscylator, operator momentu pedu

1. Zadanie obowiązkowe

Oblicz dyspersję położenia $\langle(\Delta x)^2\rangle$ i pedu $\langle(\Delta p)^2\rangle$ stanu podstawowego (tj. stanu o energii $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$) i pierwszego wzbudzonego stanu (tj. stanu o energii $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$) harmonicznego potencjału w reprezentacji położeniowej. Odpowiednie postaci wielomianów Hermite'a oraz normalizacje funkcji falowych znajdziesz w notatkach z ćwiczeń / wykładu oraz w wikipedii.

2. Zadanie obowiązkowe

(A) Wiedząc, że

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar\hat{L}_k, \quad (1)$$

oraz, że

$$\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y, \quad (2)$$

udowodnij następując relacje komutacji:

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z, \quad (3)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm. \quad (4)$$

(B) Wiedząc, że

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{ijk}\hbar\hat{L}_k, \quad (5)$$

oraz, że

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \equiv \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2, \quad (6)$$

udowodnij następując relacje komutacji:

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = 0, \quad (7)$$

$$[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_\pm] = 0. \quad (8)$$

(C) Na podstawie powyższych związków udowodnij poniższe relacje

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+) + \hat{L}_z^2, \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z, \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z. \quad (11)$$

3. Zadanie nieobowiązkowe, dla chetnych, podnoszące ilość punktów otrzymanych z jednego z powyższych zadań (tj. tego, które zbiore) od 0% do 30% (w zależności od jakości wykonania tego zadania)

Pokaż, że dwa komutujące ze sobą operatory posiadają wspólny komplet wektorów własnych. Rozważ osobno przypadki, gdy wartości własne są (nie są) zdegenerowane.