

Mechanika

Zadania na ćwiczenia - Część 5

1 Zjazd po ruchomej równi *

Równia pochyła o kącie nachylenia α oraz o masie M może przesuwać się bez tarcia po stole. Na równię położono ciężarek o masie m . Obliczyć przyśpieszenie równi oraz przyśpieszenie ciężarka w inercjalnym układzie związanym ze stołem, a także przyśpieszenie ciężarka w układzie związanym z równią. Rozpatrz dwa przypadki:

- ciężarek zsuwa się po równi bez tarcia,
- ciężarek zsuwa się po równi z tarcieniem, a współczynnik tarcia wynosi μ .

Czy ciężarek może oderwać się od powierzchni równi? Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni stołu.

2 Część i całość

Student otrzymał zadanie obliczenia siły, jaką jedna półkula jednorodnej kuli działa na drugą półkulę. Po wielu bezsensownych nocach doszedł do wniosku, że musi skorzystać z następującego twierdzenia:

Zbiór Z punktów materialnych jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów punktów materialnych: A oraz B . Jeśli oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki, to siła, jaką działa zbiór punktów B na zbiór punktów A , jest równa sile, jaką działa zbiór punktów Z na zbiór punktów A .

Udowodnij to twierdzenie.

3 Zachowanie pędu

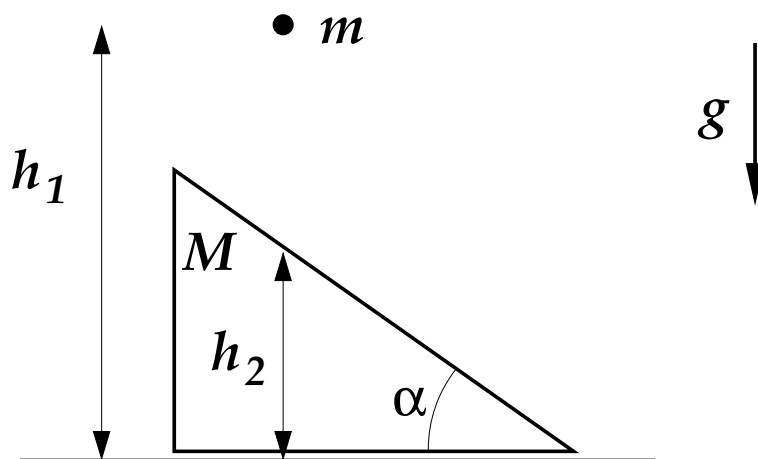
Układ N punktów materialnych jest izolowany. Oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki. Udowodnij, że całkowity pęd układu jest zachowany.

4 Rozstanie

Z dala od innych ciał spoczywa układ dwóch odważników o masach m_1 i m_2 ściskających nieważką sprężynę, której współczynnik sprężystości wynosi k , a długość swobodna równa jest L . Nieruchome odważniki znajdują się w odległości l od siebie. Oblicz prędkości odważników po chwili, gdy sprężyna przestanie na nie oddziaływać. Uzyskaj również wyniki liczbowe w przypadku, gdy $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 10$ kg, $k = 500$ N/m, $L = 50$ cm, $l = 30$ cm. Zaniedbaj oddziaływanie grawitacyjne między odważnikami.

5 Zderzenie z ruchomą równią *

Z wysokości h_1 nad poziomym lodowiskiem upuszczono kulkę o masie m . Na wysokości h_2 kulka odbiła się idealnie sprężysto od równi pochyłej, która początkowo spoczywała. Znajdź wektor prędkości kulki tuż po odbiciu się od równi. Kąt nachylenia równi wynosi α , a jej masa M . Równia może poruszać się po lodowisku bez tarcia. Układ znajduje się w polu grawitacyjnym o natężeniu g . Promień kulki oraz czas trwania zderzenia są zanedbywalnie małe. Uzyskaj również wynik liczbowy w przypadku, gdy $m = 2$ kg, $h_1 = 2.6$ m, $h_2 = 0.8$ m, $M = 4$ kg, $\alpha = 45^\circ$ oraz $g = 10$ m/s².



6 Wagon i deszcz *

Wagon o masie m_0 zaczął poruszać się bez tarcia po poziomych torach. Jego prędkość początkowa wynosiła v_0 . Ze względu na pionowo padający deszcz masa wagonu zwiększa się w tempie w . Znajdź zależność prędkości wagonu od czasu. Po jakim czasie od startu wagonu jego prędkość zmniejszy się stokrotnie, jeśli $m_0 = 10^4$ kg, $w = 0.99$ kg/s?

7 Moment pędu punktu materialnego

Wychodząc z II zasady dynamiki $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, gdzie \vec{p} jest pędem punktu materialnego, a \vec{F} działającą na niego siłą, udowodnij, że obowiązuje równanie

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M},$$

gdzie $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ (moment pędu), $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (moment siły), a \vec{r} jest wektorem położenia punktu materialnego.

8 Wirujący pocisk

Pocisk składający się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2 , połączonych sztywnym, nieważkim prętem o długości D , wyrzucono pionowo do góry. Początkowa prędkość środka masy tego układu wynosiła v_0 , a początkowa prędkość kątowa, z jaką układ obraca się względem osi przechodzącej przez środek

jego masy i prostopadłej do pręta, była równa ω_0 . Pocisk wiruje w płaszczyźnie zawierającej kierunek pionowy. Jaki jest maksymalny pionowy zasięg pocisku w tym rzucie, jeśli rozmiary ciężarków są zanedbywalnie małe? Z jaką prędkością kątową będzie wirować pocisk, gdy osiągnie maksymalną wysokość? Uzyskać również wynik liczbowy w przypadku, gdy $v_0 = 60 \text{ m/s}$, $\omega_0 = 2 \text{ rad/s}$, $D = 4 \text{ m}$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 4 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

9 Gwiazda neutronowa

Gwiazda neutronowa może mieć masę równą masie Słońca, a promień zaledwie 10 km.

a) Ile wynosi przyśpieszenie grawitacyjne na powierzchni takiej gwiazdy?

b) Ile wynosi prędkość ciała, które spadło na powierzchnię gwiazdy z wysokości 1 m, przy czym zostało puszczane bez prędkości początkowej (korzystaj tylko z teorii nierelatywistycznej)?

Masa Słońca wynosi $M_S \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, a stała grawitacji $G \approx 7 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. Gwiazda nie wykonuje ruchu obrotowego.

10 Trójkąt grawitacyjny

Jakie warunki muszą być spełnione, aby odległości między trzema swobodnymi punktami materialnymi były stałe, jeśli znane są ich masy oraz wiadomo, że punkty nie leżą na prostej? Oblicz prędkość kątową punktów materialnych w inercjalnym układzie, w którym środek ich masy spoczywa. Wyprowadź warunki na odległości pomiędzy ciałami. Punkty materialne oddziałują jedynie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.

11 Galaktyka i hipoteza ciemnej materii *

Astronomowie zaobserwowali galaktykę, w której wszystkie widoczne obiekty poruszają się po współśrodkowych okręgach. Okazało się, że dla każdego obiektu wartość jego prędkości, v , jest wprost proporcjonalna do promienia jego orbity, r , czyli $v = \omega r$, przy czym mierzone ω jest takie samo dla wszystkich obiektów. Z oszacowań wynika, że oddziaływanie między widocznymi obiektami jest zanedbywalne. Jeden z badaczy wysunął następującą hipotezę:

Galaktyka jest wypełniona ciemną, nieobserwowaną materią. Gęstość tej materii jest stała we wnętrzu kuli, której środek pokrywa się ze środkiem orbit widocznych obiektów; w kuli tej zawierają się tory wszystkich widocznych obiektów. Rozkład masy materii w pozostałej przestrzeni jest również sferycznie symetryczny.

Oblicz gęstość postulowanej ciemnej materii w obszarze, gdzie poruszają się widoczne obiekty. Potrzebną stałą przyrody uznaj za daną.