

Mechanika

Seria 6

Zadanie 1

Ogólne rozwiązanie równań ruchu w Problemie Keplera jest trudne, jednak stosunkowo łatwo można wyprowadzić szereg przydatnych zależności. Dla niewielkiej planety o masie m_1 poruszającej się, po orbicie eliptycznej, wokół gwiazdy o masie m_2 wyznacz:

1. Wartość mimośrod (ϵ) oraz długości cięciwy prostopadłej do osi wielkiej orbity przechodzącej przez jedno z ognisk ($2p$) w funkcji całkowitej energii E i całkowitego momentu pędu układu L .
2. Zależność między całkowitą energią układu i długością dużej półosi orbity.
3. Zależność między prędkością planety, a jej odległością od gwiazdy.
- ★4. Zależność między długością dużej półosi orbity, a okresem obiegu planety wokół gwiazdy (III Prawo Keplera).

Zadanie 2

Wyznacz wartość Pierwszej Prędkości Kosmicznej geometrycznie oraz korzystając z wyników poprzedniego zadania. Przyjmij $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$, promień Ziemi $R_Z = 6400\text{km}$.

Zadanie 3

Wyjaśnij dlaczego przypływy morza występują na Ziemi jednocześnie od strony Księżyca i po przeciwnej stronie planety. Wykaż, że wysokość fali przypływowej w obu tych miejscach jest jednakowa. Dlaczego podobny efekt związany z oddziaływaniem Słońca jest dużo słabszy? Argumenty poprzyj odpowiednimi rachunkami (masa i duża półoś orbity księżyca $M_K = 0.0123M_Z$, $a_K = 0.00257\text{j.a.}$, masa Słońca $M_S = 332946M_Z$). *Wskazówka: Skorzystaj z rozwinięcia $1/(1+x)^2 \approx 1 - 2x + 3x^2 - \dots$*

Zadanie 4

Niewielkie ciało spada na Słońce z odległości równej jednej jednostce astronomicznej. Znaleźć czas spadania, jeśli prędkość początkowa ciała w układzie heliocentrycznym wynosiła zero. Wykonaj obliczenia dla następujących wartości liczbowych $1\text{j.a.} = 149,6 \times 10^9\text{m}$ oraz $M_S = 1.99 \times 10^{30}\text{kg}$

Zadanie 5

Dwie gwiazdy o masach m_1 i m_2 krążą wokół wspólnego środka masy po orbitach kołowych. Ich wzajemna odległość wynosi r . Z jaką prędkością kątową obraca się ten układ? Wykonaj obliczenia dla układu podwójnego Pluton-Charon. Masa Plutona $M_P = 1.305 \times 10^{22}\text{kg}$, Charona $M_C = 1.52 \times 10^{21}\text{kg}$ i względna odległość $r = 19570\text{km}$

Zadanie 6

Oblicz promień r oraz wysokość nad powierzchnią Ziemi h orbity, dla której okres obiegu satelity jest równy okresowi obiegu Ziemi (orbita geostacjonarna). Przyjmij $g = 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, promień Ziemi $R_Z = 6400\text{km}$.

Zadanie 7

Satelita o masie m krąży po orbicie kołowej w odległości r_1 od środka Ziemi. W celu zwiększenia promienia orbity w pewnej chwili satelicie zwiększono prędkość o Δv_A tak, że zaczął poruszać się po orbicie eliptycznej o wielkiej osi $2a = r_1 + r_2$. Następnie, gdy satelita znajdował się w apogeum orbity eliptycznej zmieniono prędkość o Δv_B w taki sposób, że satelita zaczął poruszać się po orbicie kołowej o promieniu r_2 . Znaleźć Δv_A i Δv_B , jeżeli dane są przyspieszenie ziemskie na jej powierzchni g oraz promień Ziemi R_Z .

Zadanie 8

Oblicz masę Neptuna, w jednostkach masy Ziemi, wiedząc, że jego satelita Tryton odległy od planety o $a_T = 354000\text{km}$ ma okres obiegu $T = 5$ dni i 21 godz. Dane są ponadto masa Księżyca $m_K = \frac{1}{81}m_Z$, okres obiegu Księżyca dookoła Ziemi $T_K = 27,32$ dnia i jego odległość od Ziemi $a_K = 384000\text{km}$.