

Uniwersytet Warszawski

Wydział Fizyki

Joanna Zielińska

Nr albumu: 276982

Przygotowanie wiązek kontrolujących hologramy kwantowe w parach atomowych

Praca licencjacka

na kierunku Fizyka

w zakresie Fizyki doświadczalnej

w ramach Studiów Indywidualnych

Praca wykonana pod kierunkiem

dr Wojciecha Wasilewskiego

Instytut Fizyki Doświadczalnej

Zakład Optyki

Warszawa, czerwiec 2011

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawieniu jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadoma odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów)

Streszczenie

W pracy przedstawiona jest metoda wytwarzania wiązek o zadanym rozkładzie (w płaszczyźnie) fazy i amplitudy, wykorzystująca ciekłokrystaliczny przestrzenny modulator fazowy. Omówione zostały podstawowe założenia tej metody, bazującej na zadawaniu na modulatorze rozkładu fazy odpowiadającego siatce dyfrakcyjnej o zmiennej głębokości rys. Pozwala to na wysyłanie do pierwszego rzędu ugięcia określonej części światła z danego miejsca na modulatorze, dzięki czemu można uzyskać modulację amplitudy. Następnie przedstawiona została budowa i kalibracja układu eksperymentalnego realizującego tę metodę, oraz różne testy dokładności jego wykonania. Dalej omawiam sposób weryfikacji rozkładów amplitudy i fazy otrzymanej wiązki, oraz analizuję otrzymane wyniki.

Słowa kluczowe

modulator fazy, modulacja amplitudy, optyka fourierowska

Dziedzina pracy (kody według programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Klasyfikacja tematyczna

PACS:

42.30.Kq Fourier optics

42.30.Rx Phase retrieval

Tytuł pracy w języku angielskim

Formation of beams for controlling quantum holograms in atomic vapour

Spis treści

1	Wstęp	5
2	Część teoretyczna	6
2.1	Transformata Fouriera realizowana przez soczewkę	6
2.2	Wydajność dyfrakcji	7
2.3	Modulacja amplitudy za pomocą maski fazowej nakładanej na wiązkę.	9
2.4	Algorytm szukania par zespolonych transformat Fouriera	10
2.5	Dyskretna transformata Fouriera	11
3	Przestrzenny modulator fazy - działanie i kalibracja	13
3.1	Zasada działania i cechy wykorzystanego w eksperymencie modulatora	13
3.1.1	Zasada działania modulatora fazy	13
3.1.2	SLM Pluto	14
3.1.3	Krzywe kalibracyjne	14
3.2	Kalibracja	14
3.2.1	Interferencja dwóch polaryzacji	14
3.2.2	Eksperyment pozwalający na znalezienie krzywej kalibracyjnej	15
3.2.3	Wyniki. Nowa krzywa kalibracyjna.	15
4	Układ pomiarowy	18
4.1	Opis	18
4.2	Maski fazowe	19
4.3	Skalowanie obrazów z kamer	20
4.4	Testowanie działania układu	21
4.4.1	Wpływ położenia wiązki gaussowskiej w płaszczyźnie modulatora na jej po- łożenie w płaszczyźnie fourierowskiej	21
4.4.2	Wpływ fazy liniowej dodanej do wiązki gaussowskiej na położenie obrazu w płaszczyźnie obrazowej	21
4.5	Ograniczenie dyfrakcyjne	22
4.6	Korekcja amplitudy	23
5	Odzyskiwanie fazy	24
5.1	Metoda	24
5.2	Wiązka o stałej amplitudzie na całym modulatorze	24
5.3	Wiązka gaussowska	28
6	Zakończenie	32
7	Literatura	34

1 Wstęp

Przedmiotem pracy licencjackiej było wykonanie i przetestowanie układu służącego do wytwarzania wiązek o dowolnym zadanym rozkładzie amplitudy i fazy. Możliwość generowania wiązek o zadanych parametrach nie była celem sama w sobie, lecz zostanie wykorzystana jako część przyszłego eksperymentu. Wytworzona w zbudowanym przeze mnie układzie wiązka posłuży jako wiązka kontrolująca wzbudzenia w atomach rubidu.

W badaniach oddziaływania atomów z kwantowym polem elektromagnetycznym (na przykład przejść ramanowskich w atomach) często stosuje się metodę, polegającą na wykorzystywaniu dwóch wiązek o różnych długościach fali. Jedna z nich jest na tyle słaba, że w opisie matematycznym traktujemy ją kwantowo, natomiast druga, silniejsza (i przez to opisywana klasycznie) umożliwia “włączanie” i “wyłączanie” oddziaływania. Jeżeli będzie możliwe sterowanie rozkładem fazy i amplitudy tej wiązki, to dzięki temu będzie można nie tylko “włączać” i “wyłączać” wzbudzenie atomów znajdujących się w różnych punktach szklanej komórki, ale także kontrolować przestrzenny rozkład prawdopodobieństwa pojawienia się wzbudzenia oraz wzajemną fazę wzbudzeń.

Wykonany przeze mnie układ pozwala na tworzenie zadanych wiązek przy użyciu modulatora fazowego. Światło laserowe po przejściu przez układ zapewniający filtrowanie przestrzenne, kolimację, oraz odpowiednią średnicę wiązki trafia na przestrzenny modulator fazy. Przestrzenny modulator fazy jest urządzeniem, które składa się z matrycy pikseli wprowadzających zadane opóźnienia fazowe, co można wykorzystać do skierowania dowolnej części wiązki do pierwszego rzędu ugięcia. W ten sposób po odfiltrowaniu tylko pierwszego rzędu ugięcia otrzymuje się wiązkę o zadanym rozkładzie amplitudy i fazy. Następnie otrzymaną wiązkę dzieli się na dwie części za pomocą beamsplittera. Jedna z części wykorzystywana jest do obrazowania na matrycy CCD powierzchni modulatora, natomiast druga część wiązki pozwala na obrazowanie płaszczyzny fourierowskiej - najpierw wiązka przechodzi przez soczewkę, a następnie trafia na drugą matrycę CCD umieszczoną w płaszczyźnie ogniskowej. Obrazy z kamer umożliwiają odzyskiwanie rozkładu fazy i amplitudy wiązki w płaszczyźnie modulatora - amplitudę otrzymujemy bezpośrednio z kamery obrazującej modulator, natomiast rozkład fazy - analizując sygnał z obydwu matryc.

Porządek pracy jest następujący. Rozdział 1 zawiera wstęp. W rozdziale 2 znajduje się opis stosowanych narzędzi matematycznych związanych z transformatą Fouriera, oraz omówienie teoretycznych podstaw metody przestrzennej modulacji amplitudy i fazy wiązki światła przy wykorzystaniu wyłącznie modulatora fazowego. Rozdział 3 dotyczy podstawowego elementu wykonanego układu doświadczalnego - przestrzennego modulatora fazy, w szczególności zasady działania, oraz sposobu wykalibrowania modulatora. W Rozdziale 4 omawiam właściwy eksperyment - tworzenie wiązek o zadanym rozkładzie amplitudy i fazy od strony praktycznej, oraz szczegółowo przedstawiam testy mające na celu sprawdzenie poprawności wykonania układu. Ponadto, opisane zostały modyfikacje poprawiające parametry układu. Rozdział 5 zawiera opis i wyniki eksperymentów, które miały na celu wyznaczenie fazy wiązki w płaszczyźnie modulatora, natomiast Rozdział 6 podsumowuje pracę.

2 Część teoretyczna

2.1 Transformata Fouriera realizowana przez soczewkę

Przyjęta konwencja transformaty Fouriera:

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad (1)$$

gdzie x jest współrzędną z domeny położeń, natomiast k - z częstości przestrzennych.

W dalszych rozważaniach przydatny okazuje się fakt, że jeśli na soczewkę pada monochromatyczna fala płaska, to obraz powstający w ognisku jest w przybliżeniu Fresnela transformatą Fouriera fali padającej [1]. Niech współrzędne (x, y) opisują płaszczyznę soczewki, a (u, v) przyjmijmy za współrzędne w płaszczyźnie równoległej do soczewki, odległej od niej o z (rysunek 1 przedstawia sytuację dla $z = f$).

Jeśli $E'(x, y)$ jest polem po przejściu przez soczewkę, zgodnie z przybliżeniem Fresnela dostajemy:

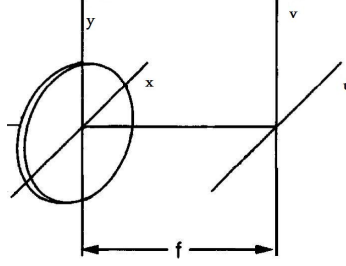
$$E(u, v) = \frac{e^{ikz}k}{2\pi iz} \iint_{-\infty}^{\infty} E'(x, y) e^{i\frac{k}{2z}((u-x)^2 + (v-y)^2)} dx dy$$

Z rozważań geometrycznych dotyczących drogi optycznej pokonywanej przez światło przechodzące przez cienką soczewkę wynika następująca różnica fazy pomiędzy polem padającym $E(x, y)$, a polem tuż za soczewką $E'(x, y)$:

$$E'(x, y) = E(x, y) e^{i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)}$$

Jeśli płaszczyzna obserwacji (u, v) jest płaszczyzną ogniskową soczewki ($z = f$, rysunek 1), to dostajemy następujący związek między falą płaską padającą na soczewkę, a obrazem powstającym w ognisku:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \tilde{E}(k_x = \frac{k}{f}u, k_y = \frac{k}{f}v) = \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(u^2 + v^2)} k}{2\pi iz} \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) e^{-i\frac{k}{f}(ux + vy)} dx dy = \\ &= \frac{e^{ikz} e^{i\frac{k}{2z}(u^2 + v^2)} k}{2\pi iz} \mathcal{F}\{E(x, y)\}\left(\frac{k}{f}u, \frac{k}{f}v\right) \end{aligned}$$



Rysunek 1: Układy współrzędnych w płaszczyźnie soczewki (x, y) oraz w płaszczyźnie ogniskowej (u, v)

Podsumowując, rozkład natężenia światła w płaszczyźnie ogniskowej soczewki $I(u, v)$ jest proporcjonalny do kwadratu modułu transformaty Fouriera pola $E(x, y)$ padającej na soczewkę. Ponieważ w eksperymencie mierzoną wielkością będzie kwadrat modułu pola w płaszczyźnie ogniskowej, czynnik fazowy przed transformatą Fouriera nie będzie miał znaczenia.

2.2 Wydajność dyfrakcji

W tym podrozdziale zostaną przeanalizowane pola wiązki w płaszczyźnie fourierowskiej $\tilde{E}(k_x, k_y)$ dla pewnych szczególnych masek fazowych zadawanych przez modulator. Rozważmy sytuację, w której w płaszczyźnie modulatora mamy wiązkę monochromatyczną o stałej amplitudzie $E_0 = 1$ oraz rozkładzie fazy $\varphi(x, y)$ wprowadzanym przez modulator, która jest ogniskowana przez soczewkę ustawioną bezpośrednio za modulatorem. Jak zostało już pokazane w poprzednim rozdziale, pole wiązki w płaszczyźnie ogniskowej soczewki będzie transformatą Fouriera pola tuż przed soczewką.

Niech tuż przed soczewką (czyli w płaszczyźnie modulatora) faza wiązki o stałej amplitudzie będzie powtarzającym się fragmentem (o długości d) funkcji $\varphi(x)$ niezależnej od jednej ze współrzędnych (prążki o zadanym kształcie – rysunek 2). Dla większej przejrzystości rozważań założmy nieskończony rozmiar modulatora i uwzględnijmy tylko jeden wymiar. Pole na płaszczyźnie modulatora można opisać periodyczną funkcją E :

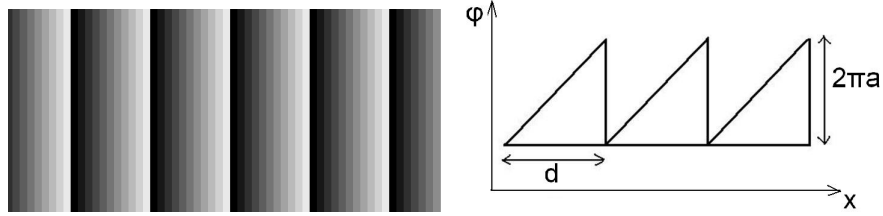
$$E(x) = \left(e^{i\varphi(x)} \text{rect}\left(\frac{2x-d}{2d}\right) \right) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-md)$$

gdzie

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & |x| > 0.5 \\ 1 & |x| \leq 0.5 \end{cases}$$

zaś symbol $*$ oznacza splot, czyli:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$



Rysunek 2: Przykładowa faza wiązki dla kształtu prążka będącego funkcją liniową (poziom szarości odpowiada wartości fazy - kolor czarny to 0, a biały to 2π). Po lewej - przekrój dla prążków o wysokości $2\pi a$.

Ponieważ modulator składa się z pikseli nakładających ograniczenie na maksymalną rozdzielczość maski fazowej, należałoby jeszcze uwzględnić fakt, że rozkład fazy nie jest ciągły, a składa się z kwadratowych obszarów o stałej fazie. Po uwzględnieniu pikseli o szerokości s , natężenie pola tuż przed soczewką jest w postaci:

$$E_{pix}(x) = (E(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - ns)) * \text{rect}\left(\frac{x}{s}\right)$$

Transformata Fouriera $E(x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{pix}(k) &= \mathcal{F}\{E_{pix}(x)\}(k) = \mathcal{F}\left\{(E(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - ns)) * \text{rect}\left(\frac{x}{s}\right)\right\}(k) = \\ &= (\mathcal{F}\{E(x)\}(k) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(k - \frac{2\pi n}{s})) \text{sinc}\left(\frac{ks}{2}\right) \end{aligned}$$

Splot $\mathcal{F}E(x)$ z sumą delt Diraca odpowiada powieleniu obrazu (kopie położone w punktach $k = \frac{2\pi}{s}$), natomiast funkcja mnożąca całość $\text{sinc}(\frac{ks}{2})$ jest bardzo wolno zmienna w porównaniu z $E(x)$ z uwagi na małą szerokość pikseli. Załóżmy teraz, że obserwujemy tylko środkowy z powielonych obrazów i piksele są bardzo małe (tzn. $\text{sinc}(\frac{ks}{2})$ jest w przybliżeniu stały w interesującym nas zakresie), co jest równoważne nieuwzględnianiu w rozważaniach pikseli. Niech ponadto

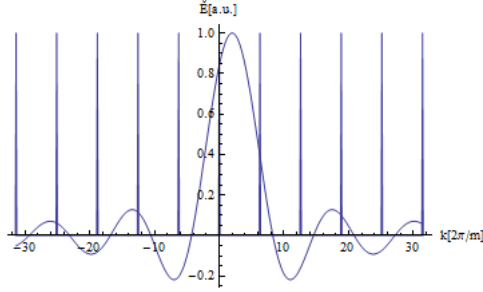
$$\varphi(x) = \frac{2\pi a}{d}x + \varepsilon(x)$$

gdzie

$$0 < a \leq 1$$

zaś $\varepsilon(x)$ jest małą, wolnozmienną poprawką (zatem $\mathcal{F}\{e^{i\varepsilon(x)}\}(k)$ jest wąską funkcją skupioną wokół $k = 0$).

Niech $\tilde{E}(k)$ będzie polem w płaszczyźnie fourierowskiej pochodzącym tylko od środkowej kopii obrazu, czyli po prostu transformatą Foriera $E(x)$:



Rysunek 3: $\mathcal{F}\{(E(x))\}(k)$ przy $\varepsilon(x) = 0$ jest iloczynem dwóch narysowanych funkcji - sinc i grzebienia Diraca. Sytuacja dla $d = 1\text{m}$ i $a = \frac{2}{\pi}$.

$$\begin{aligned}\tilde{E}(k) &= \mathcal{F}\{(E(x))\}(k) = \mathcal{F}\left\{\left(e^{i\frac{2\pi a}{d}x + i\varepsilon(x)} \text{rect}\left(\frac{2x-d}{2d}\right)\right) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x-md)\right\}(k) = \\ &= \left(\left(\delta\left(k - \frac{2\pi a}{d}\right) * \mathcal{F}\{e^{i\varepsilon(x)}\}(k)\right) * \left(\text{sinc}\left(\frac{kd}{2}\right)e^{-ikd/2}\right)\right) \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(k - \frac{2\pi m}{d}\right)\end{aligned}$$

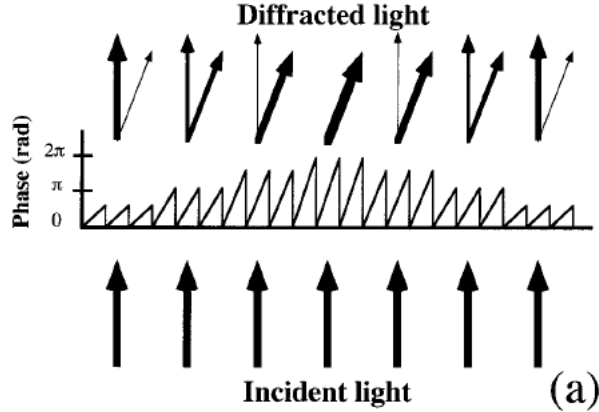
Transformata Fouriera $E(x)$ jest kombinacją delt Diraca w punktach $k = \frac{2\pi}{d}$ (ponieważ $E(x)$ jest funkcją periodyczną z okresem d). Z wyrażenia w pierwszym nawiasie otrzymujemy pik w kształcie funkcji sinc, umieszczony w punkcie $k = \pi a$. Uwzględnienie poprawki $\varepsilon(x)$ (jeszcze jeden splot z wąską funkcją skupioną w $k = 0$) powoduje dodatkowe rozmycie delt w grzebieniu Diraca odpowiadającym za próbkowanie.

Transformata Fouriera maski fazowej dla $\varepsilon(x) = 0$ to iloczyn dwóch funkcji widocznych na rysunku 3. Nie jest to iloczyn w sensie ścisłym, ponieważ delty Diraca są w jednym z punktów nieskończone. Jednak, jeśli zastosujemy uśrednianie po małym obszarze (całka z delty Diraca wynosi 1), to dostaniemy wąskie piki o amplitudach odpowiadających wartości, w której przecinają się narysowana funkcja sinc oraz któraś z delt.

Można zauważyć, że sytuacja, w której otrzymamy jeden rząd ugięcia (jeden z pików) jest możliwa tylko dla fazy liniowej, kiedy $a = 1$ (tylko pierwszy rząd ugięcia, tj. pik odpowiadający $m = 1$), oraz dla $a = 0$, kiedy pojawi się tylko zerowy rząd ugięcia. Dla pośrednich wartości a dostajemy więcej pików – o amplitudach równych przesuniętej funkcji sinc w punktach $k = \frac{2\pi n}{d}$ (przykład takiej sytuacji – rysunek 3).

2.3 Modulacja amplitudy za pomocą maski fazowej nakładanej na wiązkę.

Zjawisko opisane w poprzednim paragrafie umożliwia uzyskanie modulacji natężenia światła w dalekim polu, za pomocą nakładania tylko maski fazowej [4]. Jeśli wartość parametru $0 < a < 1$ (czyli wysokość prążków) będzie funkcją położenia na modulatorze, to ilość światła, która trafia do pierwszego (lub zerowego) rzędu w dalekim polu, także będzie funkcją położenia (ponieważ zależy od a) - rysunek 4. Dobierając odpowiedni rozkład parametru a możemy w ten sposób uzyskać dowolną modulację amplitudy w pierwszym (albo zerowym) rzędzie. Zaletą tej metody modulacji amplitudy jest niepochłanianie światła, zastąpione przez jedynie zmianę podziału natężenia na poszczególne rzędy ugięcia.



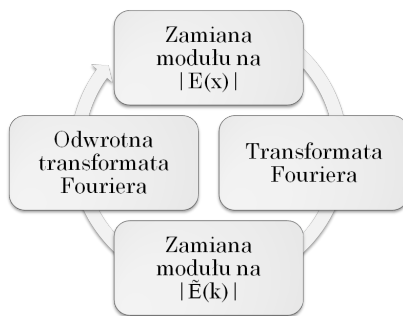
Rysunek 4: Modulacja amplitudy w pierwszym rzędzie ugięcia za pomocą dobierania parametru a (głębokości fazowej “zębów piły”) w różnych punktach modulatora. Dla powyższej maski fazowej powinna powstać w pierwszym rzędzie ugięcia wiązka w przybliżeniu gaussowska. (źródło:[4])

2.4 Algorytm szukania par zespolonych transformat Fouriera

Jeśli obserwujemy rozkład natężenia fali odbitej od modulatora zarówno bezpośrednio przed przejściem przez soczewkę, jak i w ognisku soczewki, możemy obliczyć rozkład fazy wiązki w płaszczyźnie tuż przed soczewką, co można sformułować matematycznie w następujący sposób. Mamy parę funkcji zespolonych sprzężonych transformatą Fouriera, opisujących pole elektryczne na przed soczewką $E(x)$ i w ognisku soczewki $\tilde{E}(k)$. Znamy moduły obydwu funkcji (pierwiastki z natężeń światła, które mierzymy - odpowiednio $|E(x)|^2$ i $|\tilde{E}(k)|^2$), a szukamy jednej z faz. Problem można rozwiązać numerycznie za pomocą algorytmu, który pozwala na znalezienie obydwu nieznanych faz z zadaną dokładnością.

Przed rozpoczęciem algorytmu, dobieramy do znanego modułu $|E(x)|$ dowolną fazę (najlepiej wybrać fazę bliską rzeczywistej, wtedy wynik otrzymuje się w mniejszej liczbie iteracji). Każda iteracja algorytmu składa się z następujących kroków:

- Transformata Fouriera funkcji z domeny położeń.
- Nałożenie ograniczeń w częstościach przestrzennych. W tym przypadku sprowadza się do zamiany modułu funkcji na $|\tilde{E}(k)|$ i pozostawienia fazy otrzymanej w transformacie Fouriera z poprzedniego kroku.
- Odwrotna transformata Fouriera z powrotem do domeny położeń.
- Nałożenie ograniczeń w domenie położeń – czyli wstawienie $|E(x)|$ w miejsce modułu funkcji otrzymanej w odwrotnej transformacie .



Rysunek 5: Schemat algorytmu szukania par zespolonych funkcji sprzężonych transformatą Fouriera

Algorytm zbiega bardzo szybko w pierwszych kilku iteracjach, a potem coraz wolniej (analiza wraz z dowodem zbieżności znajduje się w [2]). Po odpowiedniej ilości iteracji otrzymujemy parę funkcji sprzężonych fourierowsko, które mają zadane moduły. Faza funkcji w domenie położenia jest szukanym rozkładem fazy wiązki przed przejściem przez soczewkę.

2.5 Dyskretna transformata Fouriera

Bardzo ważnym narzędziem (będącym podstawą rozdziału 5) okazuje się dyskretna transformata Fouriera (DFT), oraz niektóre jej własności. Do zastosowania algorytmu konieczne jest odzyskanie z obrazów z dwóch kamer - obrazującej modulator i ustawionej w ognisku soczewki rozkładów modułów funkcji sprzężonych fourierowsko. Z uwagi na konieczną dyskretyzację przestrzennego pomiaru natężenia (piksele kamer), będą to dwie (dwuwymiarowe) tablice punktów $\{E(x_i)\}_{i=1,\dots,N-1}$ i $\{\tilde{E}(k_i)\}_{i=1,\dots,N-1}$, sprzężone za pomocą DFT.

Dyskretna transformata Fouriera jest odwzorowaniem przekształcającym ciąg N liczb zespolonych $\{E(x_i)\}_{i=1,\dots,N-1}$ w sprzężony ciąg N liczb zespolonych $\{\tilde{E}(k_i)\}_{i=1,\dots,N-1}$ w następujący sposób:

$$\tilde{E}(k_m) = \sum_{n=0}^{N-1} E(x_n) e^{-\frac{2\pi i m n}{N}} \quad m = 0, \dots, N-1$$

gdzie

$$x_n = n \Delta x$$

$$k_m = m \Delta k$$

przy czym Δx i Δk są powiązane w następujący sposób:

$$\Delta k = \frac{2\pi}{N \Delta x}$$

Odwzorowanie odwrotne ma postać:

$$E(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{E}(k_m) e^{\frac{2\pi i k_m n}{N}} \quad n = 0, \dots, N-1$$

Istnieje analogia pomiędzy ciągłą transformatą Fouriera zdefiniowaną równaniem 1, oraz dyskretną, jeśli potraktujemy $\{E(x_i)\}_{i=1, \dots, N-1}$ jako wartości funkcji $E(x)$ w kolejnych punktach x_i . Wtedy, jeśli próbkowanie jest dostatecznie gęste (N jest wystarczająco duże), oraz funkcja znika na krańcach przedziału, w którym ją próbujemy, to ciąg $\{E(k_i)\}_{i=1, \dots, N-1}$ będzie wartościami transformaty Fouriera funkcji $E(x)$ w kolejnych punktach.

Warto zaznaczyć, że dyskretna transformata Fouriera jest periodyczna z okresem N , zatem zakłada taką samą periodyczność funkcji wejściowej. Nie prowadzi to do problemów, jeśli funkcja znika dostatecznie szybko na krańcach przedziału, ale jeśli ten warunek nie jest spełniony, interpretacja wyniku dyskretnnej transformaty Fouriera jako ciągu próbek transformaty Fouriera funkcji, której próbki były na wejściu może prowadzić do błędnych wniosków.

Szczególnie przydatna okaże się następująca własność DFT (The Shift Theorem), analogiczna do własności ciągłej transformaty Fouriera:

$$(\mathcal{F}\{E(x_n) \cdot e^{\frac{2\pi i n m}{N}}\})_l = \tilde{E}(k_{l-m}) \quad (2)$$

$$(\mathcal{F}\{E(x_{n-m})\})_l = \tilde{E}(k_l) \cdot e^{-\frac{2\pi i l m}{N}}$$

Oznacza to, że jeśli dane wejściowe zmienimy dodając do kolejnych punktów liniowo zmieniającą się fazę, to dyskretna transformata Fouriera przesunie się o wartość proporcjonalną do nachylenia tej liniowej fazy.

Jeśli założymy, że soczewka w ognisku wytwarza idealnie transformatę Fouriera pola wiązki padającej, to przejawem powyższej własności (słusznej w obydwu podejściach - ciągłym i dyskretnym) jest fakt, że jeśli na soczewkę padnie wiązka nie prostopadle, a pod kątem, to ognisko przesunie się w płaszczyźnie fourierowskiej o odległość proporcjonalną do tego kąta.

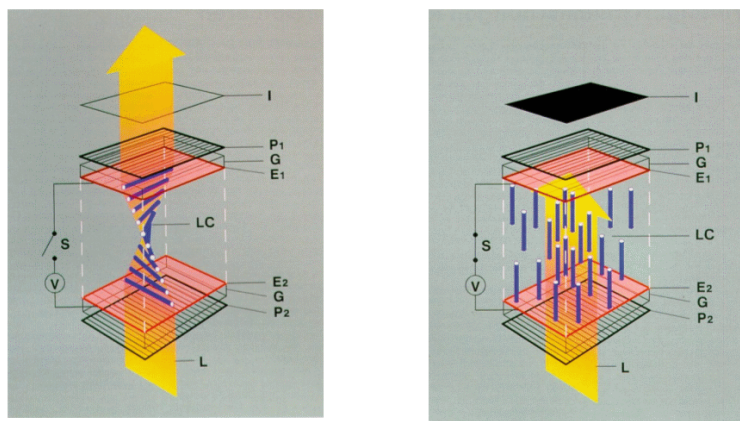
3 Przestrzenny modulator fazy - działanie i kalibracja

3.1 Zasada działania i cechy wykorzystanego w eksperymencie modulatora

3.1.1 Zasada działania modulatora fazy

Działanie przestrzennego modulatora światła (spatial light modulator) polega na modyfikowaniu przestrzennego rozkładu amplitudy albo fazy wiązki, która się od niego odbija (odbiciowy), lub przez niego przechodzi (transmisyjny). W doświadczeniu użyto ciekłokrystalicznego odbiciowego modulatora fazy, składającego się z komórek wypełnionych dwójłomnymi cząsteczkami ciekłego kryształu (czyli mającymi częściową swobodę ruchu) w fazie nematycznej. Oznacza to, że oddziaływania między cząsteczkami o anizotropowym kształcie powodują, że dążą one do ustawienia swoich osi równoległe do siebie, co zmienia dwójłomność takiej struktury, wynikającą z różnej polaryzowalności pojedynczej cząsteczki w różnych kierunkach. Załóżmy, że cząsteczki ciekłego kryształu mają kształt wydłużonych elipsoid, o symetrii obrotowej wzdłuż wydłużonej osi. Ośrodek będzie wtedy wykazywał właściwości kryształu dwójłomnego jednoosiowego, z innym (nadzwyczajnym) współczynnikiem załamania dla polaryzacji równoległej do osi kryształu, i inny (zwyčajnym) dla polaryzacji w płaszczyźnie prostopadłej.

Jeśli nie przykładamy napięcia do komórki, cząsteczki tworzą strukturę przypominającą helisę [6]. Dla fali propagującej się prostopadle do cząsteczek składających się na helisę, po przejściu przez piksel, pojawia się opóźnienie fazowe między polaryzacjami lewoskrętną i prawoskrętną (dające efektywnie obrót polaryzacji). Jeśli natomiast pojawi się odpowiednio silne pole elektryczne wzdłuż kierunku propagacji fali, cząsteczki ustawiają się wzdłuż tego kierunku i obie polaryzacje będą się rozchodzić ze zwyčajnym współczynnikiem załamania i nie nastąpi zmiana względnej fazy. Obydwie sytuacje przedstawione są na rysunku 6.



Rysunek 6: Po lewej stronie – komórka bez przyłożonego napięcia. Po prawej – cząsteczki ustawione za pomocą napięcia. Przed i za komórką umieszczono skrzyżowane polaryzatory (źródło: [6])

W ten sposób, jeśli rozważymy wszystkie pośrednie sytuacje, przesunięcie fazowe między polaryzacjami jest funkcją napięcia przykładanego do komórki, więc sterowana elektrycznie matryca

takich komórek pozwala nałożyć dowolny przestrzenny rozkład fazy na jedną z polaryzacji.

3.1.2 SLM Pluto

SLM Pluto (Holoeye) składa się z matrycy komórek wypełnionych ciekłym kryształem, umieszczonych na płaszczyźnie o wysokim współczynniku odbicia. Modulator jest odbiciowy, czyli światło padające przechodzi przez całą grubość komórki dwukrotnie. Prostokątna matryca o wymiarach 15.36mm na 8.64mm zawiera 1920 na 1080 pikseli, które wypełniają 87% wyświetlacza [5]. Modulator komunikuje się z komputerem za pomocą wyjścia DVI – traktowany jest jako drugi monitor. Wyświetlana maska fazowa jest obrazkiem składającym się z pikseli o 256 poziomach szarości (8 bitów). Dołączone oprogramowanie pozwala na wyświetlanie na modulatorze podstawowych elementów optycznych takich jak soczewki Fresnela, apertury i siatki dyfrakcyjne, jednakże dopiero program napisany w LabView pozwala na wyświetlenie dowolnej maski fazowej.

3.1.3 Krzywe kalibracyjne

Z poziomu komputera maskę fazową zadaje się w formie obrazka składającego się z punktów o różnych poziomach szarości. Poziom szarości jest następnie przeliczany na napięcie sterujące dwójłomnością odpowiedniej komórki z ciekłym kryształem. Krzywą kalibracyjną zdefiniujemy jako zależność napięcia przykładanego do komórki od poziomu szarości odpowiedniego piksela wyświetlanego obrazka.

W idealnym przypadku krzywa kalibracyjna powinna być taka, żeby zależność fazy od poziomu szarości była liniowa. Krzywe kalibracyjne dla światła o różnych długościach fali (i o różnych kątach padania) będą się różniły z uwagi na różną liczbę długości fali składających się na głębokość komórki, dyspersję ośrodka oraz zależność dwójłomności od długości fali.

3.2 Kalibracja

3.2.1 Interferencja dwóch polaryzacji

Krzywą kalibracyjną wyznaczono wykorzystując fakt, że możliwe jest sterowanie rozkładem przestrzennym fazy dla tylko jednej z polaryzacji – druga odbija się bez opóźnienia. Jeśli zadawane są stałe maski fazowe (jednolite obrazki o różnych poziomach szarości), modulator można traktować jak płytkę falową wprowadzającą regulowane opóźnienie fazy między polaryzacjami (zadane przez poziom szarości obrazka). Rozważmy sytuację, w której na modulator, na którym wyświetlamy jednolity obrazek o poziomie szarości g , pada wiązka o polaryzacji skierowanej pod kątem 45° do polaryzacji, na którą działa maska fazowa. Wtedy jedna połowa wiązki o amplitudzie E_1 (o odpowiedniej polaryzacji) dozna opóźnienia fazowego $\varphi(g)$ zależnego od poziomu szarości obrazka, a druga (o polaryzacji prostopadłej do pierwszej i amplitudzie E_2) dozna stałego opóźnienia φ_0 . Jeśli za modulatorem ustawimy kolejny polaryzator, o osi prostopadłej do osi pierwszego polaryzatora, otrzymamy obraz interferencyjny o natężeniu:

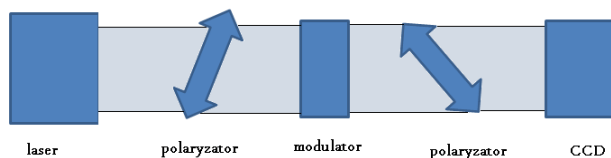
$$|E_2 e^{i\varphi_0} - E_1 e^{i\varphi(g)}|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2E_1 E_2 \cos(\varphi(g) - \varphi_0) \quad (3)$$

Powyższy wzór zostanie wykorzystany do znalezienia zależności $\varphi(g)$, z której można wyznaczyć prawidłową krzywą kalibracyjną. Należy jeszcze zaznaczyć, że z uwagi na odbicie od przedniej płaszczyzny modulatora, oraz od 13% powierzchni niepokrytej pikselami, sytuacja, w której jedna z polaryzacji w całości dozna opóźnienia $\varphi(g)$ jest idealizacją – jakaś część światła będzie miała

opóźnienie niezależnie od maski fazowej. Nie będzie to miało jednak wpływu na wynik, zatem nie zostało to tutaj uwzględnione.

3.2.2 Eksperyment pozwalający na znalezienie krzywej kalibracyjnej

Układ pomiarowy do wyznaczenia krzywej kalibracyjnej modulatora za pomocą interferencji składał się z lasera, dwóch polaryzatorów, filtrów, oraz kamery CCD. Jeden z polaryzatorów został pomiędzy laserem a modulatorem, o kierunku dobranym tak, aby natężenie obydwu polaryzacji było identyczne. Drugi z polaryzatorów ustawiono tak, żeby przepuszczał polaryzację prostopadłą do przepuszczanej przez pierwszy i ustawiono za modulatorem. Wiązkę po przejściu przez drugi polaryzator obserwowano za pomocą kamery CCD. Zastosowano krzywą kalibracyjną modulatora (nieprawidłową) dla jak największej długości fali (rysunek 7), tak, aby faza, o którą można opóźnić jedną polaryzację względem drugiej była jak największa (a na pewno większa niż 2π). Modulator oraz kamerę kontrolowano za pomocą programu napisanego w LabView. Na modulatorze wyświetlane były obrazy różnych poziomach szarości.



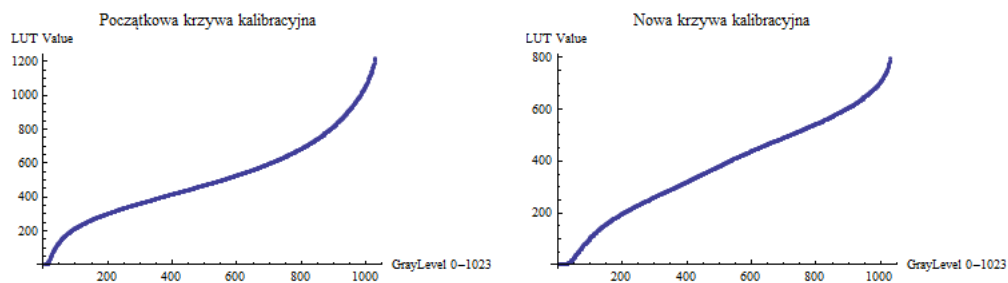
Rysunek 7: Układ do kalibracji modulatora

Opisany układ pozwolił na otrzymanie za drugim polaryzatorem obrazu, dla którego natężenie światła odpowiada poziomowi szarości obrazka wyświetlanego na modulatorze, dzięki czemu wyznaczono zależność natężenia światła od poziomu szarości. Od zebranych danych (natężenie światła w zależności od poziomu szarości) odjęto najmniejszy element (aby uzyskać tylko zmieniającą się część), przeskalowano tak, aby natężenie zmieniało się od 0 do 2, a następnie odjęto jeden. Fazę $\varphi(g) - \varphi_0$, o którą piksel (o danym poziomie szarości) opóźnia względem siebie polaryzacje otrzymano zgodnie z równaniem 3, obliczając $\arccos$ znormalizowanego w opisany wcześniej sposób natężenia światła.

Jednakże, ze względu na niewielkie fluktuacje długości fali oraz natężenia światła emitowanego przez laser, skuteczniejsze okazało się wyznaczanie natężenia światła na matrycy CCD dla wszystkich poziomów szarości jednocześnie. Zatem opisana wcześniej metoda została nieco zmodyfikowana - wyświetlano na modulatorze obrazki o sinusoidalnie zmiennym poziomie szarości, i rejestrowano natężenie światła w zależności od położenia na kamerze, co także pozwoliło uzyskać zależność natężenia światła od poziomu szarości obrazka.

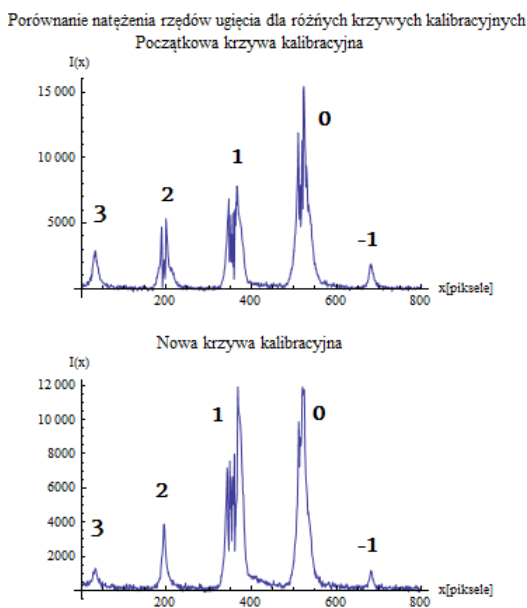
3.2.3 Wyniki. Nowa krzywa kalibracyjna.

Poniżej (rysunek 8) przedstawione są dwie krzywe kalibracyjne - początkowa i nowa - wyznaczona w oparciu o opisane wyżej pomiary. „LUT value” (look up table) jest związane z napięciem przykładanym do piksela. Poziom szarości (Gray level) zmienia się od 0 do 1023 (ale korzystamy z masek fazowych, które są obrazkami 8-bitowymi, więc rozróżniamy tylko 256 kolorów odpowiadających różnym fazom).



Rysunek 8: Krzywe kalibracyjne

Korzystając z zależności różnicy faz między polaryzacjami od poziomu szarości, oraz krzywej kalibracyjnej (nieodpowiedniej), przy której wykonano pomiary, wyznaczono wartość LUT w zależności od fazy, następnie obliczono nową krzywą kalibracyjną, czyli LUT w zależności od poziomu szarości, przy którym zależność poziomu szarości od fazy będzie liniowa.



Rysunek 9: Amplitudy obserwowanych rzędów ugięcia - stara i nowa krzywa kalibracyjna. Widoczne są rzędy ugięcia 3, 2, 1, 0 i -1 (kolejno od lewej).

Powyższy rysunek (9) przedstawia porównanie rejestrowanego sygnału (z odjętym szumem) dla prążków liniowych w poziomie szarości (z minimum w 0 i maksimum w 255) odpowiednio dla starej i nowej krzywej kalibracyjnej. Pik o maksimum w okolicach piksela numer 350 jest w obydwu przypadkach pierwszym rzędem ugięcia, a zerowy rząd znajduje się przy 550 pikselu. Przy starej krzywej kalibracyjnej natężenie światła w pierwszym rzędzie ugięcia wyniosło 16.2% całkowitego

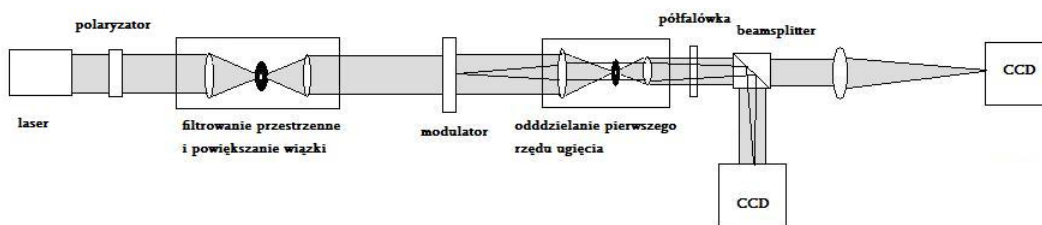
natężenia rejestrowanego we wszystkich rzędach. Przy nowej krzywej kalibracyjnej natężenie światła w pierwszym rzędzie ugięcia wyniosło 39.7% całkowitego. Podsumowując, wyznaczenie nowej krzywej kalibracyjnej poprawiło wydajność dyfrakcji w pierwszym rzędzie ugięcia prawie dwukrotnie.

4 Układ pomiarowy

W tym rozdziale znajduje się opis układu do wytwarzania wiązek o zadanej amplitudzie i fazie (określonych w płaszczyźnie modulatora), oraz weryfikacji otrzymanej wiązki. O ile sprawdzenie, czy otrzymaliśmy poprawną amplitudę nie przedstawia większych trudności (wystarczy zobrazować modulator i dostaniemy natężenie światła, czyli kwadrat amplitudy pola elektrycznego), to pomiar fazy jest nieco bardziej skomplikowany i zostanie opisany w kolejnym rozdziale. Właśnie do pomiaru fazy zostanie wykorzystany algorytm, pozwalający na odzyskanie faz zaspółonych funkcji sprzężonych fourierowsko mając ich amplitudy. Rozważana funkcja to pole elektryczne (faza i amplituda) wiązki na modulatorze, a jej transformatę Fouriera otrzymamy ogniskując wiązkę za pomocą soczewki. Rejestrując obydwie funkcje za pomocą kamer CCD, możemy wyznaczyć rozkład fazy wiązki na modulatorze (opis algorytmu znajduje się w części teoretycznej - rozdział 2.4).

4.1 Opis

Schemat układu pomiarowego znajduje się na rysunku poniżej.



Rysunek 10: Schemat eksperymentu.

Jako źródło światła użyty został laser o mocy 30mW, emitujący światło podczerwone o długości fali 780nm. Dodatkowo tuż za laserem ustawiono polaryzator, w celu wybrania polaryzacji, której fazę zmienia modulator. Następnie wiązka była skupiana przez soczewkę, przechodziła w ognisku przez otwór o średnicy kilkudziesięciu mikrometrów (filtrowanie przestrzenne), oraz dwie kolejne soczewki (rozpraszającą i skupiającą), aby skolimowana i powiększona oświetlić cały modulator.

Po odbiciu od modulatora (na rysunku dla prostoty przedstawiony jako transmisyjny), wiązka trafiała na teleskop pomniejszający ją dwa razy z ustawioną pośrodku przesłoną przepuszczającą tylko pierwszy rząd ugięcia (liczba pikseli na prążek, a więc też stała siatki dyfrakcyjnej tworzonej przez modulator była ustalona w całym eksperymencie i wynosiła 6, więc pierwszy rząd nie zmieniał położenia). Rozmiar przesłony grał istotną rolę, ponieważ musiał być z jednej strony jak największy (aby można było zarejestrować jak najwięcej częstotliwości przestrzennych wiązki w pierwszym rzędzie), a drugiej strony jak najmniejszy, żeby nie przechodziło przez nią światło z innych rzędów ugięcia.

Następnie wiązka trafiała na półfalówkę i polaryzującą kostkę światłodzielną. Dobierając ustawienie półfalówki można było regulować stosunek natężeń dwóch wiązek wychodzących z beamsplittera. Jedna z tych wiązek trafiała bezpośrednio na kamerę CCD, ustawioną w ognisku tylnej soczewki teleskopu, dzięki czemu uzyskiwano na niej ostry obraz modulatora. Kamery ustawiono

dokładnie w płaszczyźnie, gdzie powstaje obraz modulatora, dobierając jej położenie tak, aby na obrazie przez nią rejestrowanym nie była widoczna dyfrakcja na krawędziach modulatora.

Druga część wiązki wychodzącej z beamsplittera przechodziła przez soczewkę, i ogniskowała się bezpośrednio na środku innej matrycy CCD.

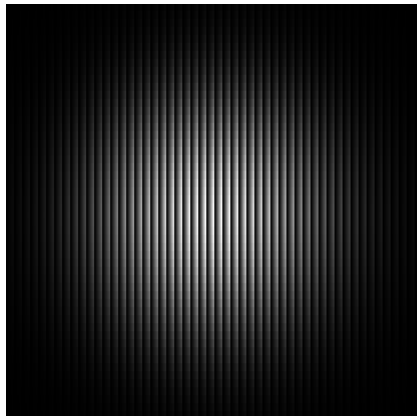
Obydwie matryce CCD osłonięte zostały krótkimi, plastikowymi rurkami, które zapobiegały rejestrowaniu przez nie światła pochodzącego z innego kierunku niż oczekiwany. Ponadto używano różnych kombinacji filtrów, ustalając w każdej sytuacji optymalne natężenia wiązek padających na kamery.

4.2 Maski fazowe

Maski fazowe (obrazki wyświetlane na modulatorze), dzięki którym w pierwszym rzędzie ugięcia powstawała wiązka o żądanej amplitudzie i fazie obliczano w następujący sposób. Cała powierzchnia modulatora została podzielona na kwadraty 6 na 6 pikseli, co w sumie dało 320 na 180 “dużych pikseli” - z taką rozdzielczością zadawano fazę i amplitudę. Obrazek wyświetlany na każdym z “dużych pikseli” był opisywany przez dwa parametry - amplitudę i fazę.

Amplituda zmieniała się od 0 do 2π , i określała różnicę pomiędzy maksimum i minimum liniowej fazy (nachylenie w kierunku poziomym), którą wyświetlano na każdym z dużych pikseli. Amplituda równa 0 odpowiadała płaskiej fazie (wiązka padająca na piksel trafia w zerowy rząd), natomiast maksymalna - fazie liniowej zmieniającej się od 0 do 2π na długości dużego piksela (wiązka padająca na piksel trafia całkowicie w pierwszy rząd). W ten sposób po odfiltrowaniu rzędów ugięcia innych niż pierwszy przez przesłonę było możliwe uzyskanie zadanego rozkładu amplitudy wiązki.

Fazę regulowano dodając do każdego z dużych pikseli (zawierających fazę liniową zmieniającą się od 0 do amplitudy) płaski podkład, i biorąc resztę z dzielenia przez 2π otrzymanych wartości.



Rysunek 11: Przykładowa maska fazowa - wytwarza wiązkę gaussowską w pierwszym rzędzie ugięcia

W przypadkach, kiedy wyświetlana była tylko liniowa maska fazowa, nie dzielono modulatora na duże piksele - do fazy liniowej wysyłającej całe światło w pierwszy rząd (42,67 różnicy w poziomie szarości (0-255) między sąsiednimi pikselami w poziomie, czyli 6 pikseli na zmianę fazy o 2π) dodawano dodatkową fazę liniową, po czym dopiero wtedy brano otrzymany rozkład modulo

2π . Pozwoliło to uniknąć niepotrzebnego zmniejszania rozdzielczości, oraz rozproszenia światła na krawędziach dużych pikseli.

4.3 Skalowanie obrazów z kamer

Rejestrując obraz z kamery otrzymujemy na każdym pikselu wartość proporcjonalną do średniego kwadratu amplitudy padającego światła na obszarze piksela. Ze względu na to, musimy stosować dyskretną transformatę Fouriera do analizy otrzymywanego sygnału - próbkowanego pikselami matrycy CCD. Aby było możliwe wykorzystanie algorytmu opisanego w części teoretycznej do odzyskania fazy na modulatorze z obrazów kamer, konieczne było uzyskanie z nich dwóch tablic punktów, które są sprzężone dyskretną transformatą Fouriera. Zostało to zrealizowane w sposób opisany poniżej.

Najpierw rozważmy obraz pochodzący z kamery obrazującej powierzchnię modulatora. Tablicę punktów N na M (nazwijmy ją $|E(x_i, y_j)|_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, M}$) do wykorzystania w algorytmie otrzymano wycinając piksele, na których był widoczny modulator (na którym wyświetlano siatkę dyfrakcyjną, która posyłała całą wiązkę padającą w pierwszy rząd ugięcia). Otrzymano w rezultacie tablicę $M = 652$ na $N = 1139$ pikseli.

W celu uzyskania z kamery umieszczonej w ognisku soczewki tablicy wartości o tych samych wymiarach (oznaczymy ją przez $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, M}$), sprzężonej fourierowsko do poprzedniej wykorzystano opisaną wcześniej własność DFT (The Shift Theorem, równanie 2). Zauważmy, że maksymalna faza liniowa, którą możemy dodać do tablicy $|E(x_i, y_j)|$ (dla prostoty rozważmy tylko kierunek poziomy- 1139 pikseli) odpowiada różnicy od 0 do π w fazie między sąsiednimi pikselami, natomiast minimum to liniowa faza od 0 do 2π na całej długości tablicy $|E(x_i, y_j)|$ (czyli $2\pi/1139$ różnicy między sąsiednimi pikselami), przy czym tablica $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ powinna się wtedy przesunąć o 1 piksel w poziomie. Wykorzystano to w ten sposób, że do siatki dyfrakcyjnej na modulatorze dodano fazę liniową odpowiadającą różnicy $2\pi/1000$ między pikselami modulatora (i $\frac{2\pi}{1000} \frac{1920}{1139}$ między pikselami kamery) i zmierzono, o ile średnio przesunął obraz na kamerze w ognisku soczewki (3.35 piksela kamery). Stąd otrzymano "gęstość punktów" tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ na matrycy kamery, czyli ustalono, że w poziomie odległość między punktami tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ odpowiada na kamerze 1.74 piksela, a pionie 3.1 piksela. Po wyznaczeniu na kamerze środka tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ (położenie ogniska wiązki z modulatora bez dodawania do siatki fazy liniowej), można już łatwo wyznaczyć całą tablicę $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$.

Jednakże, należy jeszcze uwzględnić fakt, że oddzielając pierwszy rząd dyfrakcji od pozostałych za pomocą przesłony obcinamy częstotliwości przestrzenne w wiązce do niewielkiego wycinka wokół $k = 0$, co sprawia, że kamera w ognisku soczewki może nie zarejestrować całej tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$. Im mniejsza jest przesłona, tym mniejszą część tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ można zebrać. Z drugiej strony, nadmierne zwiększanie średnicy przesłony także było niekorzystne, ponieważ jeśli pojawiają się wyższe częstotliwości przestrzenne w pierwszym rzędzie, to pojawiają się także w pozostałych rzędach. Sprawia to, że sąsiednie rzędy ugięcia zlewają się w ognisku soczewki (czyli w płaszczyźnie przesłony), uniemożliwiając skuteczne odfiltrowanie tylko pierwszego rzędu. Zatem, optymalną średnicę przesłony ustalono tak, żeby można było na kamerze zarejestrować ok 6% długości i szerokości tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$. Ostatecznie, z obrazu na kamerze odzyskiwano tylko środkową część tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ - 192 na 108 punktów (wykorzystując sygnał z obszaru kamery 333 na 336 pikseli), natomiast resztę tablicy wypełniano zerami.

4.4 Testowanie działania układu

4.4.1 Wpływ położenia wiązki gaussowskiej w płaszczyźnie modulatora na jej położenie w płaszczyźnie fourierowskiej

W celu zbadania poprawności działania układu wykonano pomiar, dzięki któremu wyznaczono “fazowy kształt modulatora”, czyli zniekształcenia frontu falowego wprowadzone przez nierówną powierzchnię modulatora. Zauważmy, że odchylenia położenia wiązki biegnącej od modulatora w płaszczyźnie fourierowskiej (w ognisku) są proporcjonalne do wielkości fazy liniowej na modulatorze, którą dodajemy do siatki dyfrakcyjnej. Zatem, dwuwymiarowe wektory odchylenia ogniska dla małych wiązek wysyłanych do pierwszego rzędu z określonych punktów modulatora pozwoliły wyznaczyć gradient fazy w tych punktach, z czego możliwe było odzyskanie “fazowego kształtu modulatora”.

Experyment polegał na wyświetlaniu na modulatorze maski fazowej wytwarzającej w pierwszym rzędzie ugięcia wiązkę gaussowską o szerokości kilkunastu “dużych pikseli” w różnych miejscach modulatora (“przeskanowano” cały), i pomiarze położenia obrazu w płaszczyźnie fourierowskiej. W idealnym przypadku niezaburzonego frontu falowego, w układzie nie powinniśmy zaobserwować żadnych zmian położenia - wiązka niezależnie od położenia w płaszczyźnie modulatora powinna trafiać w ten sam punkt na kamerze w ognisku (odpowiadający środkowi tablicy $|\hat{E}(k_{xi}, k_{yj})|$).

Kolejny rysunek przedstawia wyniki - fazowy kształt modulatora obliczony na podstawie przesunięć ogniska.



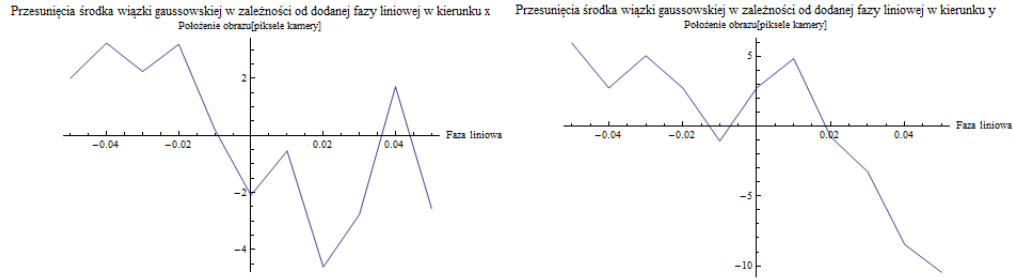
Rysunek 12: Fazowy kształt modulatora

4.4.2 Wpływ fazy liniowej dodanej do wiązki gaussowskiej na położenie obrazu w płaszczyźnie obrazowej

Wykonano jeszcze jeden test dokładności ustawienia układu, analogiczny do poprzedniego - zadano na modulatorze maskę fazową wytwarzającą wiązkę gaussowską na środku z dodaną do niej niewielką liniową fazą, i mierzono położenie obrazu wiązki na kamerze obrazującej modulator. W

idealnym przypadku (bez aberracji i z kamerą ustawioną dokładnie w płaszczyźnie ogniskowej) położenie to powinno pozostawać stałe.

Poniższe wykresy (rysunek 13) przedstawiają położenia wiązki (odchylenia w pikselach kamery od średniego położenia) w zależności od liniowej fazy (podanej w różnicy między sąsiednimi pikselami modulatora w poziomie szarości zmieniającym się od 0 do 1). Zmieniając fazę w kierunku poziomym mierzono poziomą składową położenia (x), a w pionowym - pionową (y). Wykryte odstępstwa zostały uznane za pomijalnie małe.



Rysunek 13: Odchylenie wiązki od średniego położenia w zależności od dodanej fazy liniowej.

4.5 Ograniczenie dyfrakcyjne

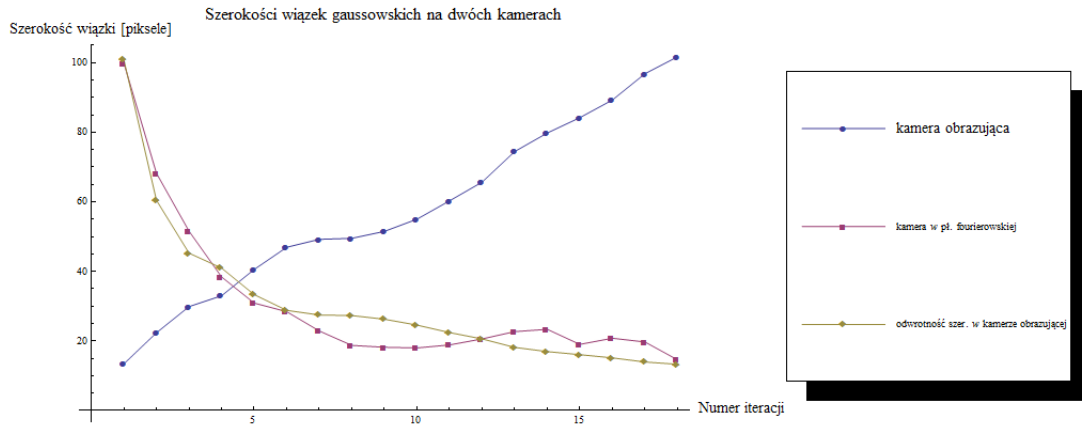
Ponadto przetestowano układ kolejny raz przez porównanie z układem ograniczonym dyfrakcyjnie (brak aberracji i idealne ustawienie elementów), wykonując następujący pomiar. Na modulatorze wyświetlano maski fazowe wytwarzające wiązki gaussowskie o różnych szerokościach, i wykonywano pomiary szerokości tych wiązek widocznych na obydwu kamerach (tutaj szerokością nazywam szerokość na poziomie e^{-2}).

W układzie ograniczonym dyfrakcyjnie w rezultacie otrzymanoby zależność odwrotnej proporcjonalności szerokości wiązek na rejestrowanych przez obydwie kamery. Wynika to z własności transformaty Fouriera - iloczyn szerokości funkcji Gaussa, które są sprzężone transformatą Fouriera wynosi $1/2$. Zatem jest to sposób na sprawdzenie, czy obrazy na obydwu kamerach są rzeczywiście parą funkcji sprzężonych transformatą Fouriera.

Niestety, im mniejsza wiązka gaussowska na modulatorze, tym mniej światła dociera do kamer, zatem zmiana szerokości wyświetlanej wiązki wymagała za każdym razem dobrania czasów naświetlania każdej z kamer, a poniżej pewnej szerokości, pomiar stał się niemożliwy ze względu na światło z innych rzędów ugięcia, które powodowało zakłócenia nie pozwalające na wyznaczenie szerokości dużej wiązki o bardzo małym natężeniu (przy maksymalnym czasie naświetlania) na kamerze w ognisku soczewki.

Rysunek 14 przedstawia wyniki opisanego eksperymentu. Krzywa niebieska to szerokość wiązki na kamerze obrazującej modulator, czyli na tablicy $|E(x_i, y_j)|$ (szerokość na wiązki gaussowskiej w masce fazowej zmieniała się o stały krok przy każdym kolejnym pomiarze), natomiast krzywa zielona składa się z punktów proporcjonalnych do odwrotności szerokości z kamery obrazującej, czyli określa szerokości, jakie powinny zostać uzyskane na kamerze w ognisku soczewki w idealnym przypadku. Natomiast krzywa zielona to rzeczywiste pomiary szerokości wiązki padającej na kamerę w ognisku (czyli szerokości wiązki na tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$). Pomiar szerokości wykonywano wycinając z obrazu

kamery fragment zawierający wiązkę i dopasowując rozkład gaussowski, którego szerokość uznawano za wynik pomiaru. Tutaj szerokości są mierzone w pikselach tablic $|E(x_i, y_j)|$ i $|\bar{E}(k_{xi}, k_{yj})|$, czyli obraz jest analizowany już po przejściu procedury skalowania.



Rysunek 14: Ograniczenie dyfrakcyjne.

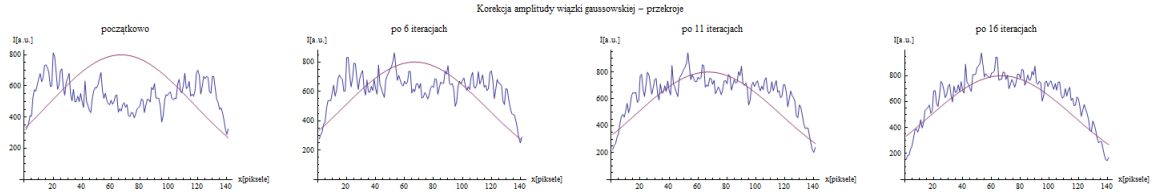
Na podstawie wyników można stwierdzić, że układ niewiele odbiega od ograniczonego dyfrakcyjnie, a niewielkie odstępstwa można wytłumaczyć tym, że dokładne określenie szerokości wiązki gaussowskiej, która jest rzędu wielkości 1 piksela jest praktycznie niemożliwe.

4.6 Korekcja amplitudy

Z uwagi na zastosowane przybliżenie, że amplituda prążków siatki dyfrakcyjnej jest liniowo powiązana z amplitudą światła, które jest wysyłane do pierwszego rzędu ugięcia (choć w rzeczywistości jest to zależność w kształcie funkcji sinc), oraz niedoskonałości wiązki z lasera (wiązka padająca na modulator nie jest jednorodna, a ponadto rozkład niejednorodności nie jest stabilny w czasie), konieczne okazało się poprawianie rozkładów amplitudy wiązek wytwarzanych w opisany wcześniej sposób.

Zostało to zrealizowane przy pomocy następującej procedury. Obraz z kamery obrazującej modulator przekształcono w ten sposób, aby rozmiarami odpowiadał tablicy dużych pikseli (a więc i zadawanej tablicy amplitud), czyli 320 na 180 pikseli. Następnie dodawano do maski fazowej poprawkę, będącą różnicą między początkową tablicą amplitud (czyli docelowym rozkładem), a rozkładem uzyskanym z pomiarów, znormalizowaną w ten sposób, aby maksimum natężenia odpowiadało jedynce. W rezultacie otrzymano algorytm, który zwiększał amplitudę “zęba piły” na modulatorze w tych obszarach, gdzie rejestrowane natężenie było za małe, a zmniejszał tam, gdzie za duże (oczywiście proporcjonalnie do wielkości odchylenia od idealnego rozkładu).

Przykład, jak wiązka dzięki działaniu algorytmu dąży do zadanego rozkładu na różnych etapach działania programu przedstawiono poniżej (rysunek 15)



Rysunek 15: Korekcja amplitudy - przekroje co kilka iteracji.

5 Odzyskiwanie fazy

W tym rozdziale zostanie opisane odzyskiwanie fazy wiązki w płaszczyźnie modulatora, w oparciu o rozkłady natężenia światła w tej samej płaszczyźnie oraz w płaszczyźnie fourierowsko sprzężonej.

5.1 Metoda

Po opisanej poprzednio procedurze skalowania obrazów z kamer, obydwie tablice wartości pierwiastka natężenia światła $|E(x_i, y_j)|$ i $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ zostały wykorzystane jako tablice modułów funkcji sprzężonych fourierowsko do algorytmicznego odzyskiwania fazy. Jako fazę początkową algorytmu zadawano za każdym razem fazę płaską - tablicę zer. Zwykle otrzymane wyniki (otrzymana tablica fazy na modulatorze) nie zmieniały się w sposób znaczny powyżej trzydziestej iteracji algorytmu, zatem stosowano w większości przypadków 50 iteracji.

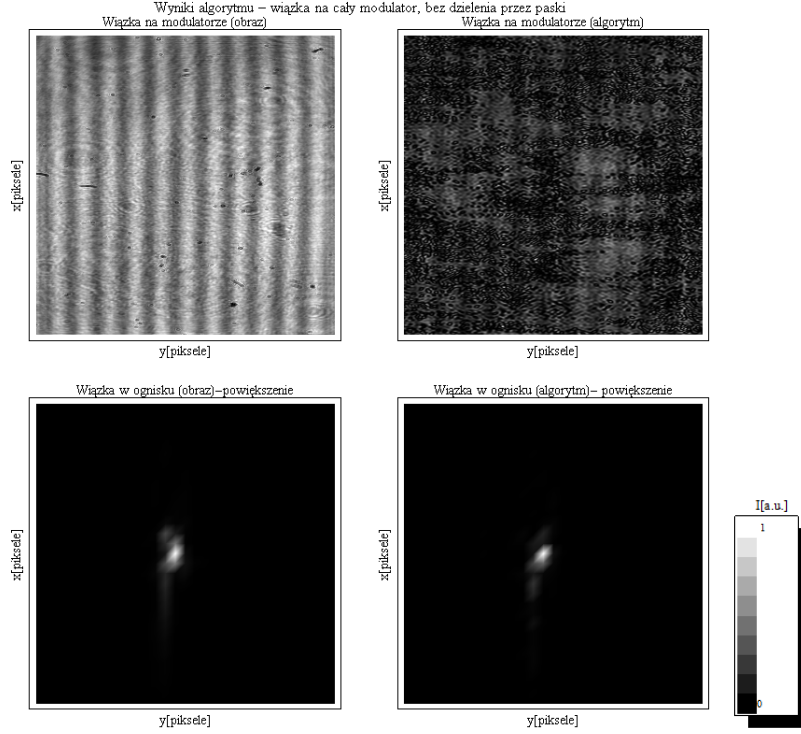
Ponadto, otrzymany wynik weryfikowano wykonując transformatę Fouriera zmierzonej tablicy amplitud wiązki na modulatorze $|E(x_i, y_j)|$ z fazą odzyskaną za pomocą algorytmu, i porównywano jej moduł z tablicą amplitud wiązki w ognisku soczewki, czyli $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$. Ponieważ algorytm za każdym razem odzyskuje obydwie fazy, czyli także fazę wiązki w płaszczyźnie ogniskowej soczewki, możliwe było wykonanie jeszcze jednego podobnego testu - obliczenia odwrotnej transformaty Fouriera zmierzonej tablicy amplitud $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ razem z fazą odzyskaną algorytmem i porównanie wyniku z pierwiastkiem zmierzonego rozkładu natężenia światła na modulatorze, czyli $|E(x_i, y_j)|$. W dalszej części, za każdym razem, oprócz wyniku, czyli fazy na modulatorze zostaną zaprezentowane także wyniki tych testów.

5.2 Wiązka o stałej amplitudzie na całym modulatorze

W tym podrozdziale opisana została analiza za pomocą algorytmu (opisanego w rozdziale 2.4) tablic $|E(x_i, y_j)|$ i $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ uzyskanych dla maski fazowej odpowiadającej wiązce o jednorodnym natężeniu w pierwszym rzędzie ugięcia.

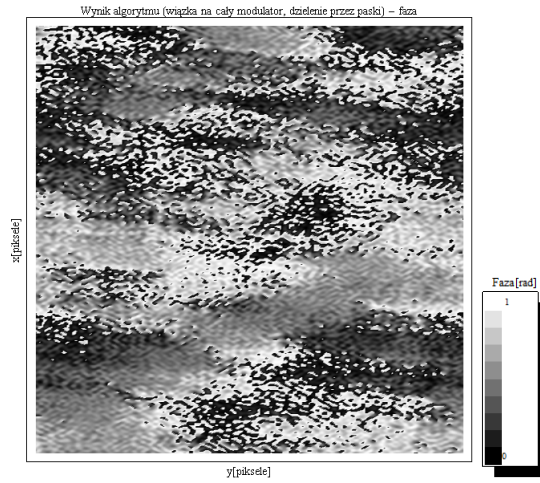
Niestety, jak widać w lewym górnym rogu rysunku 16 (gdzie znajduje się wyznaczona tablica $|E(x_i, y_j)|$), wiązka biegnąca od modulatora do kamery obrazującej zniekształcona jest przez prążki, pochodzące od beamsplittera, które pojawiają się tylko w jednej części rozdzielanej wiązki, tj. wiązka padająca na kamerę w płaszczyźnie fourierowskiej jest wolna od tego zaburzenia. Oznacza to, że otrzymane z obrazów obydwu kamer tablice $|E(x_i, y_j)|$ i $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ mogą odbiegać od modułów funkcji sprzężonych transformatą Fouriera, więc faza, której szukamy może nie istnieć i algorytm oczywiście nie zadziała tak, jak powinien.

Poniżej (rysunek 16) przedstawiono w pierwszej kolumnie wyznaczone z obrazów kamer tablice analizowane algorytmem - $|E(x_i, y_j)|$ (u góry) i $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ (u dołu). Obraz z ogniska soczewki jest znacznie powiększony, aby był widoczny kształt wiązki. Tablice $|E(x_i, y_j)|$ i $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ porównane zostały z (druga kolumna) rozkładami odtworzonymi za pomocą fazy uzyskanej w wyniku działania algorytmu, która znajduje się na rysunku 17.



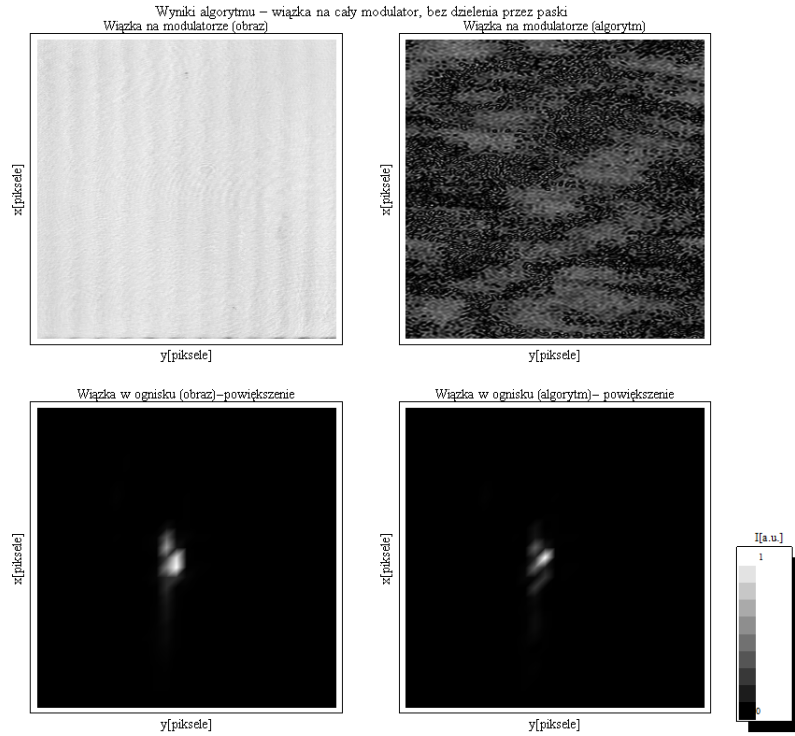
Rysunek 16: Wiązka o jednorodnej amplitudzie na całym modulatorze, bez poprawiania pasków. W pierwszej kolumnie znajdują się tablice $|E(x_i, y_j)|$ (u góry) i środkowa część tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ (u dołu). Druga kolumna odpowiada analogicznym rozkładom otrzymanym za pomocą algorytmu.

Rysunek 16 przedstawia odzyskaną algorytmem fazę. Kolor biały odpowiada fazie 0, natomiast czarny - fazie 2π . Zatem, każda zmiana od białego do czarnego przez szary oznacza ciągłą fazę o 2π , natomiast skokowa zmiana koloru z białego na czarny wcale nie oznacza gwałtownego skoku fazy.



Rysunek 17: Faza na modulatorze obliczona dla wiązki jednorodnej na całym modulatorze, z niepoprawionymi paskami.

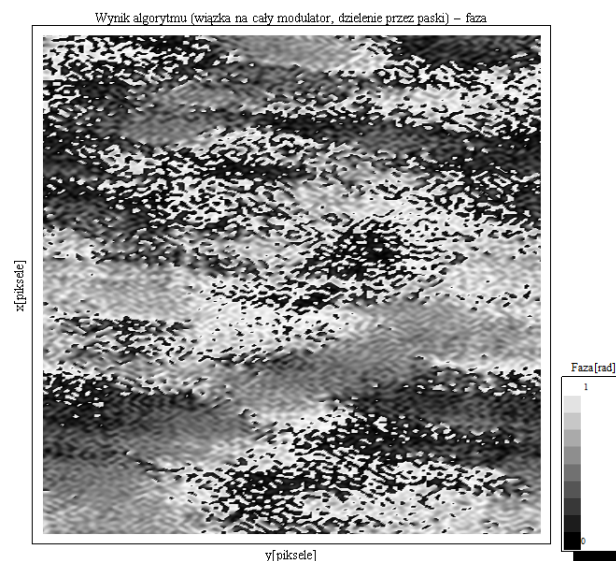
Kolejny przedstawiony w podobny sposób pomiar (rysunki 18 i 19) różni się od poprzedniego tym, że podjęto próbę rozwiązania problemu pasków na kamerze obrazującej modulator. Zmierzono rozkład pasków, i podzielono przez niego tablicę $|E(x_i, y_j)|$ przed wykorzystaniem jej w algorytmie. W prawym górnym rogu rysunku 18 widoczny jest rozkład już po podzieleniu. Od tego momentu wszystkie rozkłady natężenia z kamery obrazującej modulator przed zastosowaniem algorytmu będą dzielone przez mierzony za każdym razem rozkład pasków. Jak widać na rysunku, można w ten sposób znacznie osłabić to zaburzenie.



Rysunek 18: Wiązka o jednorodnej amplitudzie na całym modulatorze, po podzieleniu przez paski. W pierwszej kolumnie znajdują się tablice $|E(x_i, y_j)|$ (u góry) i środkowa część tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ (u dołu). Druga kolumna odpowiada analogicznym rozkładom otrzymanym za pomocą algorytmu.

Można zauważyć, że otrzymany rozkład fazy jest nieco bardziej płaski niż w poprzednim przypadku. Jednak, niepokojąca wydaje się różnica pomiędzy rozkładami amplitud - zmierzonym i obliczonym po podstawieniu do transformaty Fouriera otrzymanej z algorytmu fazy. Należy tu przypomnieć, że funkcja nieznikająca na brzegach przedziału próbkowania nie spełnia warunków potrzebnych do interpretowania wyników DFT jako próbek transformaty Fouriera, co jest podstawą działania algorytmu odzyskiwania fazy.

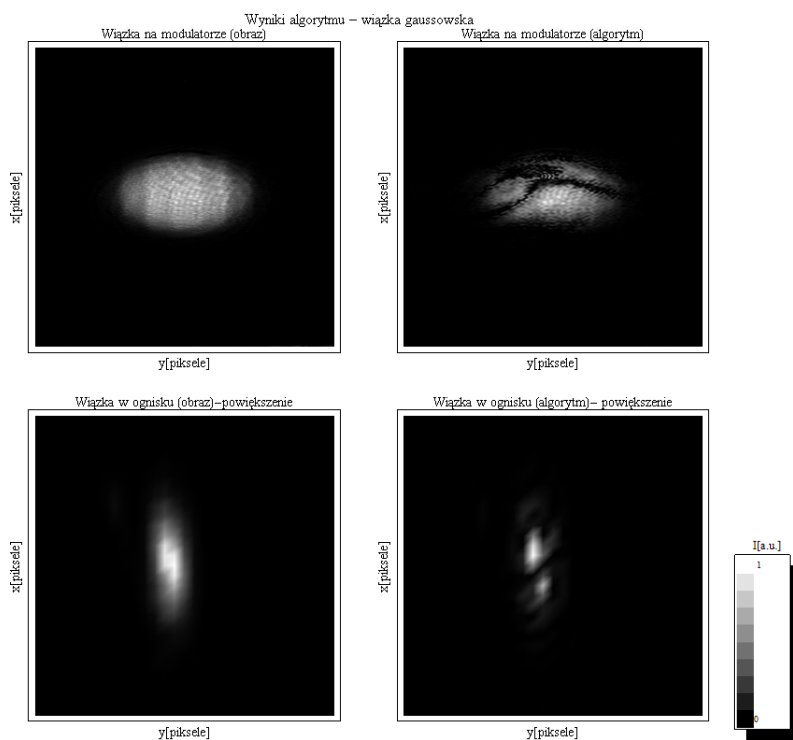
Jeśli rozważymy transformatę Fouriera funkcji równej na całej płaszczyźnie 1 (stosując DFT zakładamy periodyczność funkcji wejściowej, a odstępstwa od jednorodnego poziomu szarości nie przekraczają 10%), to powinniśmy dostać deltę Diraca - czyli jeden biały piksel na czarnym tle. Z danych wejściowych widać, że obraz w ognisku nie przypomina jednego piksela, zatem prawdopodobnie analizowane przez algorytm tablice nie są dokładnie sprzężone fourierowsko.



Rysunek 19: Faza na modulatorze obliczona dla wiązki jednorodnej na całym modulatorze, z niepoprawionymi paskami.

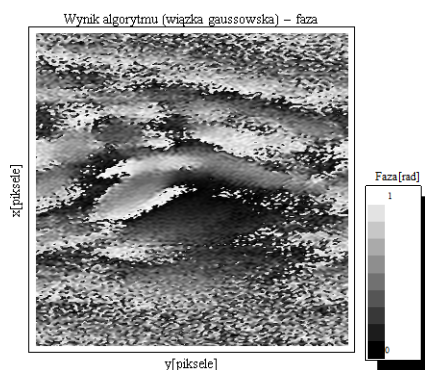
5.3 Wiązka gaussowska

Zastosowano także algorytm do niewielkiej wiązki gaussowskiej, która spełnia warunek znikania za końcu przedziału. Tak jak wcześniej, podzielono $|E(x_i, y_j)|$ przez paski przed zastosowaniem algorytmu. Jak widać algorytm nie jest w stanie (rysunek 20) znaleźć fazy, która dokładnie spełnia nakładane na nią warunki - odzyskane natężenia światła (transformaty Fouriera wynikowej fazy razem ze zmierzoną w drugiej kamerze tablicą modułów) - dostajemy obraz, który jest zniekształcony. A dokładniej, jak można wywnioskować z rysunku 20 - obraz, w którym brakuje niektórych punktów.



Rysunek 20: Wiazka gaussowska. W pierwszej kolumnie znajdują się tablica $|E(x_i, y_j)|$ (u góry) i środkowa część tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ (u dołu). Druga kolumna odpowiada analogicznym rozkładom otrzymanym za pomocą algorytmu.

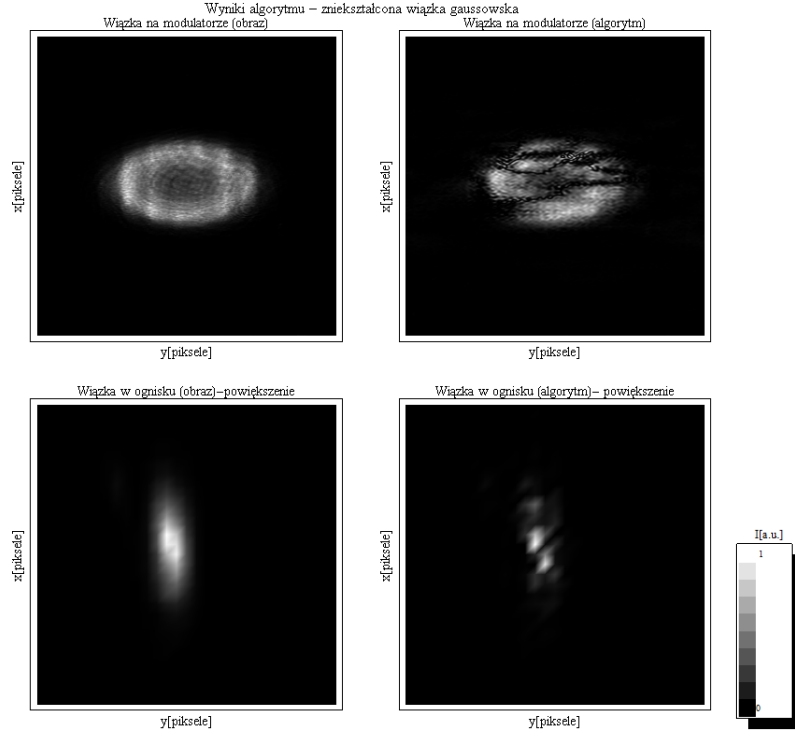
Na rysunku 21 widoczna jest odzyskana dla wiązki gaussowskiej faza. Należy brać pod uwagę tylko środkową część przedstawionego obrazu, ponieważ w pozostałych częściach modulatora wiązka miała praktycznie zerowe natężenie, więc nie da się określić jej fazy. Jak można zauważyć, środkowa część nie odbiega dużo od fazy płaskiej.



Rysunek 21: Faza na modulatorze obliczona dla wiązki gaussowskiej

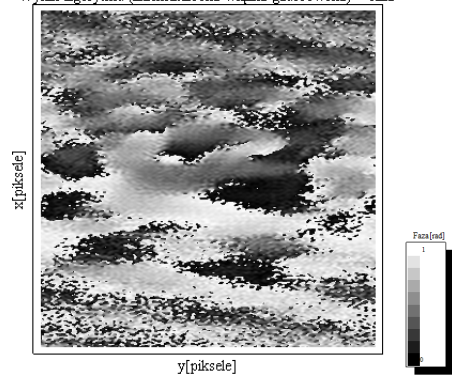
Analogiczny pomiar przeprowadzono dla wiązki w kształcie “obwarzanka” (gaussowskiej zniekształconej otworem w środku). Wyniki przedstawione są na rysunkach 22 i 23.

Jak widać, okazuje się, że pomimo zaburzeń, na tablicy natężeń sprawdzającej algorytm także jest wyraźnie został odtworzony spadek natężenia światła w okolicach środka wiązki.



Rysunek 22: Zniekształcona wiązka gaussowska. W pierwszej kolumnie znajdują się tablice $|E(x_i, y_j)|$ (u góry) i środkowa część tablicy $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ (u dołu). Druga kolumna odpowiada analogicznym rozkładom otrzymanym za pomocą algorytmu.

Wynik algorytmu (zniekształcona wiązka gaussowska) – faza



Rysunek 23: Faza na modulatorze obliczona dla zniekształconej wiązki gaussowskiej

6 Zakończenie

W niniejszej pracy licencjackiej zajęłam się problemem tworzenia wiązek o zadanym w płaszczyźnie rozkładzie amplitudy i fazy. Najpierw sposób na wytwarzanie żądanych wiązek za pomocą modulatora fazowego został przeanalizowany od strony teoretycznej. Następnie omówiona została konstrukcja i kalibracja układu, który umożliwiał nie tylko generowanie zadanych wiązek w oparciu o rozumowanie oparte na przybliżeniach, ale także na weryfikację otrzymanych wyników. Ponadto opisane zostały testy pozwalające na sprawdzenie, czy układ działa poprawnie, które zaowocowały wyznaczeniem zaburzenia frontu falowego wprowadzanego przez nierówny kształt modulatora, opracowaniem algorytmu poprawiania rozkładu amplitudy wiązki, oraz porównaniem z układem ograniczonym dyfrakcyjnie, które dało rezultat pozytywny.

Zasadniczym napotkanym problemem okazało się skuteczne wyznaczanie fazy wiązki w płaszczyźnie modulatora. Podjęto próbę zastosowania do tego celu algorytmu wyszukiwania zespolonych par funkcji sprzężonych transformatą Fouriera o zadanych modułach. Zastosowanie algorytmu do analizy danych eksperymentalnych pozwoliło na uzyskanie wyniku (obliczonego rozkładu fazy), który nie do końca spełnia nałożone na niego ograniczenia (zadane moduły transformat Fouriera). Sugeruje to, że dokładna faza, którą usiłuje znaleźć algorytm nie istnieje, czyli, że nakładane ograniczenia (mierzone w eksperymencie rozkłady natężeń światła) nie są modułami pary funkcji sprzężonych fourierowsko, czyli zniekształcenia wprowadzane przez układ eksperymentalny są na tyle duże, że rozkład pola elektrycznego w płaszczyźnie modulatora, oraz w płaszczyźnie soczewki nie są dokładnie powiązane transformatą Fouriera.

Mimo tego, udało się uzyskać wynik - rozkład fazy, który w przybliżeniu spełnia żądane warunki, oraz nie wykazuje dużych odstępstw rozkładu fazy od rozkładu płaskiego, którego można było oczekiwać.

Otrzymane rezultaty wyznaczają kierunek dalszej pracy nad ulepszaniem wykonanego już układu. W szczególności, najbliższymi krokami będzie:

- zmniejszenie rozmiaru tablic $|E(x_i, y_j)|$ oraz $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$, z maksymalnego osiągalnego w układzie (ograniczonego przez rozdzielczość kamery), czyli 1139 na 652, do rozmiaru 320 na 180, co odpowiada rozmiarowi tablicy “dużych pikseli”, czyli rozdzielczości, z którą możliwe jest zadawanie rozkładu fazy i amplitudy wiązki. Uśrednianie zastosowane przy zmniejszeniu rozdzielczości tablic $|\tilde{E}(k_{xi}, k_{yj})|$ i $|E(x_i, y_j)|$ spowoduje wygładzenie funkcji analizowanych algorytmem, co z kolei być może sprawi, że tablice będą sprzężone fourierowsko z lepszą dokładnością.
- ulepszenie sposobu generowania masek fazowych. Obecnie na granicach pomiędzy “dużymi pikselami” następuje skok fazy, który powoduje rozproszenie światła. Możliwe, że korzystniejsze okaże się zastosowanie następującego pomysłu na obliczanie maski fazowej. Najpierw należy wziąć rozkład fazy (z rozdzielczością modulatora) z dodaną fazą liniową (odpowiedzialną za wysyłanie wiązki o zadanym rozkładzie w pierwszy rząd ugięcia) i obliczyć reszty z dzielenia przez 2π . Następnie pomnożyć całość przez (wolnozmienny) rozkład amplitudy. Przy zastosowaniu tej metody nie wystąpią rozproszenia na granicach “dużych pikseli”, oraz zwiększy się rozdzielczość, z którą możemy manipulować rozkładem fazy i amplitudy wiązki.

Podziękowania

Dziękuję promotorowi - dr Wojciechowi Wasilewskiego za zaproponowanie ciekawego tematu, liczne i cenne uwagi oraz cierpliwość.

7 Literatura

- [1] J.W. Goodman, Introduction to Fourier Optics
- [2] J. R. Fienup, Iterative method applied to image reconstruction and to computer generated holograms, Optical Engineering 19(3), 297-305, (1980)
- [3] J.A. Davis, K.O. Valadez, D.M. Cottrell, Encoding amplitude and phase information onto a binary phase-only spatial light modulator, Applied Optics 42, 2003-2008, (2003)
- [4] J.A. Davis, D.M. Cottrell, J. Campos, M.J. Yzuel, I. Moreno, Encoding amplitude information onto phase-only filters, Applied Optics 38, 5004-5013, (1999)
- [5] Holoeye, Pluto SLM manual
- [6] http://en.wikipedia.org/wiki/Twisted_nematic_field_effect