

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Daniel Pęczak

Nr albumu: 290923

**Analiza teoretyczna roli poszerzenia
Dopplera i zderzeń z gazem
buforowym w rozpraszaniu Ramana
w parach atomowych.**

Praca magisterska
na kierunku FIZYKA
w zakresie FIZYKI TEORETYCZNEJ

Praca wykonana pod kierunkiem
dr. Wojciecha Wasilewskiego
Instytut Fizyki Doświadczalnej
Zakład Optyki

Warszawa, wrzesień 2014

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadomy odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W niniejszej pracy wyprowadzono równania ewolucji atomu w polu elektromagnetycznym. W równaniach uwzględniono efekt Dopplera, a uzyskane równania rozwiązano otrzymując macierz propagatorów. Następnie do rozważań włączono efekt zderzeniowy, który powoduje termalizację i powstałe w ten sposób równanie także rozwiązano, otrzymując funkcje Greena. Równania skwantowano, a następnie wyznaczono wartości oczekiwane pól na stanie próżni elektromagnetycznej bez oraz z obecnością początkowych wzbudzeń atomowych.

Słowa kluczowe

rozpraszanie Ramana, fala spinowa, efekt Dopplera, pamięć kwantowa, termalizacja, równanie Boltzmannna

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13.2 Fizyka

Klasyfikacja tematyczna

42.65.Dr Stimulated Raman scattering;
42.50.Ct Quantum description of interaction of light and matter;
42.50.-p Quantum optics

Tytuł pracy w języku angielskim

Theoretical analysis of the role of Doppler broadening and collisions with the buffer gas in the Raman scattering in atomic vapors.

Pracę dedykuję moim Rodzicom

Podziękowania

Chciałbym serdecznie podziękować mojemu promotorowi, dr. Wojciechowi Wasilewskiemu, za poświęcony mi czas, nieprzebrane pokłady cierpliwości i cenne wskazówki dotyczące pracy. Bardzo pomogły mi wszystkie dyskusje, odpowiedzi na pytania, zwłaszcza te dotyczące weryfikacji modeli za pomocą doświadczenia.

Jestem bardzo wdzięczny kolegom z Koła Naukowego Optyki i Fotoniki, którzy wprowadzili mnie do zespołu i dzięki którym mogłem się rozwijać, wiele nauczyć, a przede wszystkim ukierunkować swój rozwój.

Pragnę także podziękować moim Rodzicom oraz Karolinie za udzielane mi wsparcie i motywację.

Spis treści

Wstęp	8
1. Oddziaływanie atomu z polem	15
1.1. Hamiltonian układu dwupoziomowego	16
1.1.1. Przybliżenie wirującej fali	17
1.1.2. Diagonalizacja	17
1.1.3. Ewolucja	18
1.2. Hamiltonian układu trójpoziomowego	18
1.2.1. Przybliżenie adiabatyczne	20
1.2.2. Efektywny hamiltonian układu λ	20
1.2.3. Uogólnienie na wiele poziomów wzbudzonych	20
1.3. Równanie Liouville’a-von Neumanna	21
1.3.1. Macierz gęstości	21
1.3.2. Ewolucja	22
1.4. Równania pól	25
1.4.1. Odczyt	25
1.4.2. Zapis	26
2. Efekt Dopplera	27
2.1. Obecność jednego pola laserowego	28
2.2. Obecność dwóch pól laserowych	30
2.2.1. Mechanizm strat	31
2.2.2. Diagonalizacja równań	31
2.2.3. Rozwiązanie w przestrzeni Laplace’a	34
2.2.4. Uśrednione wzbudzenia	39
2.3. Stosowalność	40
2.3.1. Zanik dwuwykładniczy	40
3. Zderzenia	43
3.1. Równanie Boltzmann	43
3.2. Mody Gaussów-Hermite’ów	44
3.2.1. Mod zerowy	45
4. Kwantowanie	47
4.1. Wartości oczekiwane na stanie próżni	49
4.1.1. Bez termalizacji	49
4.1.2. Natychmiastowa termalizacja	49
4.1.3. Wzbudzenia w zależności od odstrojenia pompy	50
4.1.4. Porównanie modelu bez termalizacji i z termalizacją	50
4.1.5. Wkłady od emisji spontanicznej i wymuszonej	51
5. Podsumowanie	53

A. Dipolowy moment przejścia	55
B. Parametry symulacji	57

Wstęp

Fizyka teoretyczna nie zawsze rozwija się równo z fizyką eksperymentalną. W pewnych dziedzinach fizycy zmagają się z brakiem danych eksperymentalnych (ogólna teoria względności), podczas gdy w innych danych jest dużo i teoria ma wiele do nadrobienia (fizyka cząstek). Najdynamiczniej jednak rozwój fizyki przebiega gdy rozwój teorii oraz technik doświadczalnych zachodzi w sposób zrównoważony.

Przykładem ekstremalnej zgodności jest elektrodynamika kwantowa, której przybliżeniem jest optyka kwantowa. QED (ang. *quantum electrodynamics*), teoria zweryfikowana najdokładniej spośród wszystkich dziedzin fizyki, może się poszczycić niezwykle dużą zgodnością pomiarów magnetycznego momentu dipolowego elektronu z obliczeniami teoretycznymi — do 11 miejsca po przecinku [1]. Eksperymenty opierają się na badaniu widm przejść w atomach. Nowoczesne spektrometry osiągają bardzo dużą precyzję. Pomiary z wykorzystaniem tych urządzeń pozwalają na dokładniejsze oszacowanie wartości stałych fizycznych, dzięki którym można z kolei wykonać dokładniejsze pomiary (metoda *bootstrap*). Eksperymenty obecnie wykonywane, dzięki swej precyzji, pozwalają na wykrycie problemów w Modelu Standardowym [2]. Dlatego warto mieć na uwadze dziedzinę, które posiadają możliwość testowania modeli teoretycznych lub stoją na skraju takich możliwości. Obszar optyki kwantowej oraz teorii kwantowej informacji jest miejscem gdzie panuje szybki rozwój i ścisła współpraca teoretyczno-eksperymentalna.

Wraz z pojawieniem się odpowiedniego aparatu matematycznego oraz pojęciowego, zaczęto badać algorytmy kwantowe takie jak kwantowa dystrybucja klucza [3, 4] czy algorytm Shora służący do faktoryzacji liczb [5]. Złożoność (przekładająca się na czas) rozkładania liczby zapisanej w postaci N bitów mogła zostać potencjalnie zredukowana z $O(e^N)$, używając klasycznych procedur, do $O(\log^3(N))$ aplikując algorytm Shora. W obecnie stosowanych metodach szyfrowania kluczem jest stosowanie dużych liczb pierwszych (tzn. posiadających kilka milionów cyfr), których szybkość znalezienia spada wraz z ich rosnącą długością¹. Wizja zbudowania komputera kwantowego, który mógłby wykonać zaproponowane algorytmy spotkało się z dużym zainteresowaniem ze strony między innymi banków ze względu na zwiększenie bezpieczeństwa. Łatwo sobie wyobrazić wpływ posiadania kwantowej maszyny na ogół ludzkości. Nic dziwnego, że od tego czasu są intensywnie prowadzone próby skonstruowania komputerów kwantowych.

Obliczenia kwantowe, jak sama nazwa wskazuje, opierają się na manipulowaniu obiektami kwantowymi. Najczęściej są to fotony, atomy lub cząstki uwięzione w pułapkach. Potęgą algorytmów kwantowych opiera się na istnieniu wyżej wymienionych obiektów w stanie superponozycji. Główną przeszkodą techniczną² jest fakt, że stany te są niezwykle delikatne i wiele czynników (włączając pomiary) niszczy je. Można opracowywać protokoły przeciwdziałające stratom [8, 9]. Innym sposobem podejścia do problemu przenoszenia stanów w przestrzeni jest metoda nazwana protokołem teleportacji [10]. W przeciwieństwie do algorytmu Shora rozwój technologii teleportacji stanów kwantowych jest dosyć szybki i można spotkać doświadczenia, które są w stanie zaprezentować użycie tej metody na dystansie dziesiątków kilometrów [11, 12]. Najbliższym celem dla naukowców staje się zrealizowanie teleportacji używając satelitów [13, 14].

¹Informacja o nieznannej liczbie pierwszej posiadającej miliony cyfr może być nagrodzona nagrodą pieniężną [6].

²Do tej pory udało się sfaktoryzować za pomocą układu kwantowego liczbę 21 [7].

Przenoszenie stanów w przestrzeni jest niewątpliwie ważne, jednak powinniśmy umieć przenosić stany kwantowe także w czasie, tak jak obecnie zapisywana jest informacja w pamięci RAM, którą się wykorzystuje później. Wrażliwość stanów kwantowych powoduje, że ulegają dekoherencji na skutek oddziaływania z otoczeniem, a przenoszona informacja jest tracona. Warto zdać sobie sprawę, że obecnie stany kwantowe są zapisywane na czasy rzędu ułamków sekund [15, 16, 17], a nawet minut [18]. Być może w porównaniu z klasycznymi nośnikami informacji, które można przechowywać latami bez utraty danych, nie brzmi to efektownie, ale należy pamiętać jak kruche są superponowane stany. Biorąc powyższe pod uwagę, zapis stanu kwantowego na minutę jest bardzo dużym osiągnięciem. Rozwój w tym kierunku jest bardzo prężny — czas zapisu stanów kwantowych stale się zwiększa. Drugim ważnym czynnikiem decydującym o przydatności pamięci jest łatwość użycia nośnika. Temperatury bliskie zera bezwzględnej co prawda zmniejszają dekoherencję, jednak są niepraktyczne, więc należy poszukiwać metod łatwiejszych w zastosowaniu.

Opracowanie nowych algorytmów kwantowych daje nam ogromną wiedzę. Równie ważne jest dogłębne poznanie procesów rządzących dynamiką pamięci kwantowych, a które nie są wystarczająco dobrze poznane. Dokładne modele fizyczne pozwolą na spójny opis, optymalizację układów i stanowią kolejny krok ku działającemu komputerowi kwantowemu. W tej pracy chciałbym zająć się dokładnym modelowaniem zjawiska wykorzystywanego przy pamięciach kwantowych opartych na parach rubidu.

Protokół pamięci kwantowej

Jedną z możliwych realizacji pamięci kwantowej jest użycie jako nośnika komórek z gorącymi parami atomowych metali alkalicznych, w szczególności rubidu. Pamięci kwantowe oparte na rubidzie są szeroko badane na całym świecie [15, 16, 19], więc przydatnym byłoby poznanie dokładnego mechanizmu działania komórek. Bezpośrednią motywacją pracy badawczej nad teoretycznym opisem zjawiska rozpraszania Ramana jest chęć wypracowania modelu optymalizującego eksperyment opisany w pracy [20]. W doświadczeniu oprócz komórki (nośnika) używane są dwa lasery o różnych częstotliwościach. Wiązka o wyższej częstotliwości jest nazywana wiązką zapisującą, natomiast ta o niższej — wiązką odczytującą.

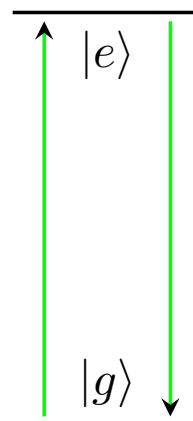
Zanim przejdę do opisu matematycznego modelu, czyli głównej części pracy, wyjaśnię we wstępie jak jakościowo wygląda protokół pamięci kwantowej w tym konkretnym przypadku. Na czym polega zapis i odczyt oraz jakie zjawiska fizyczne występują podczas używania pamięci.

Podstawowym zjawiskiem, które zachodzi podczas przechodzenia światła przez materię jest rozpraszanie Rayleigha. Foton jest pochłaniany przez cząstkę, a następnie emitowany w losowym kierunku. Częstotliwość fotonu nie zmienia się podczas tego procesu. Proces jest przedstawiony na diagramie Jabłońskiego na rys. 1.

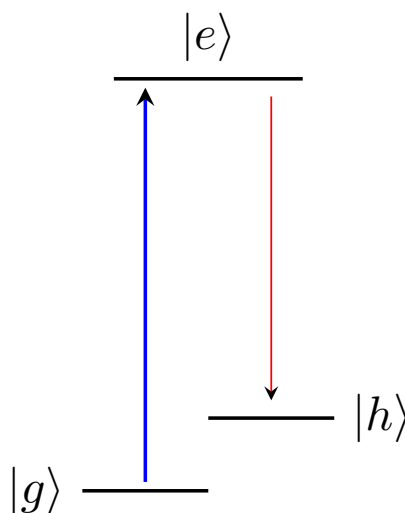
W 1928 roku Chandrasekhar Raman zaobserwował [21] w badanym widmie, oprócz linii odpowiedzialnych za przejścia typu Rayleigha, niewielkie natężenia promieniowania o lekko zmniejszonej częstotliwości, równo odległe od centralnego piksu. Odkrycie to było na tyle ważne, że w 1930 roku zostało uhonorowane nagrodą Nobla. Zjawisko zaobserwowane przez Ramana tłumaczy się tym, że przy skomplikowanych układach poziomów wzbudzona cząstka może przejść nie do stanu podstawowego, tylko do lekko wzbudzonego (proces nazywany rozpraszaniem stokesowskim). Może się także zdarzyć, że owe stany lekko wzbudzone pod wpływem padającego promieniowania wzbudzą się, a następnie deekscytują do poziomu podstawowego (rozpraszanie antystokesowskie). Oba te zjawiska tworzą rozpraszanie Ramana i są przedstawione na rysunkach 2 oraz 3. Charakterystyczny układ trójpoziomowy, w którego skład wchodzi poziom wzbudzony oraz dwa niższe, leżące blisko siebie, nazywany jest ze względu na kształt układem lambda. Poziomy te są zwykle oznaczane stanami $|g\rangle$, $|h\rangle$ oraz $|e\rangle$ — zgodnie z rosnącą energią. War-

to podkreślić, że w rozpraszaniu Stokesa pochłaniane jest promieniowanie o wyższej częstotliwości, a emitowane o niższej. W rozpraszaniu antystokesowskim jest odwrotnie.

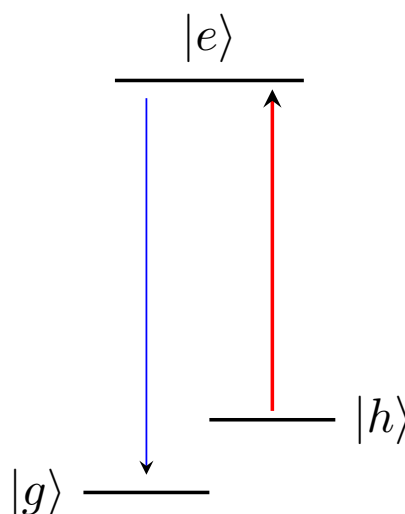
Rysunek 1: Przedstawienie mechanizmu rozpraszania Rayleigha. Foton zostaje pochłonięty przez atom i wzbudza go z poziomu podstawowego $|g\rangle$ do poziomu $|e\rangle$. Następnie atom deekscytuje do poziomu podstawowego, emitując foton o tej samej częstotliwości co padający.



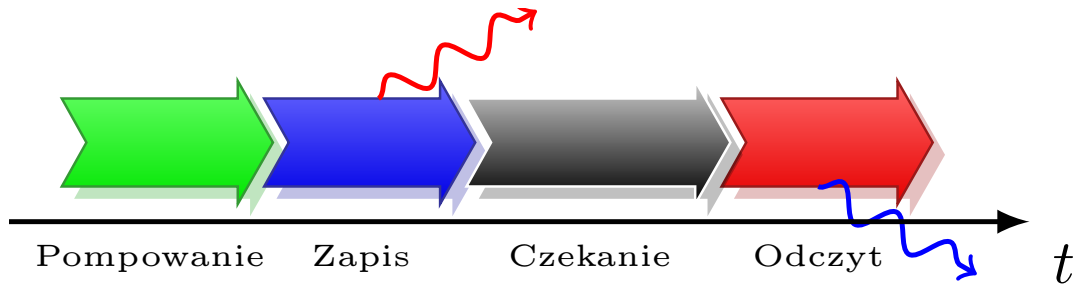
Rysunek 2: Rozpraszanie Ramana. Przedstawienie mechanizmu powstawania pasma stokesowskiego. Wiązka świetlna o wyższej energii (przedstawiona na niebiesko) powoduje wzbudzenie atomu z poziomu $|g\rangle$ do poziomu $|e\rangle$, który natychmiast przechodzi do poziomu $|h\rangle$ emitując foton, nazywany fotonem stokesowskim, o częstotliwości niższej (przedstawiony na czerwono) niż fotonu padającego.



Rysunek 3: Rozpraszanie Ramana. Przedstawienie mechanizmu powstawania pasma antystokesowskiego. Wiązka świetlna o niższej energii (przedstawiona na czerwono) powoduje wzbudzenie atomu z poziomu $|h\rangle$ do poziomu $|e\rangle$, który natychmiast przechodzi do poziomu podstawowego $|g\rangle$, emitując foton, nazywany fotonem antystokesowskim, o częstotliwości wyższej (przedstawiony na niebiesko) niż fotonu padającego.



Znając podstawy zjawiska Ramana mogę opisać schemat działania typowej pamięci (rys. 4), który rozwinę dalej (rys. 5). Proces zaczyna się fazą przygotowania komórki (rys. 5(a)). Następnie



Rysunek 4: Schemat działania pamięci kwantowej: pompowanie, zapis z detekcją fotonów stokesowskich, czekanie, odczyt z generacją fotonów antystokesowskich o znanych stanach, które można użyć do protokołów kwantowych.

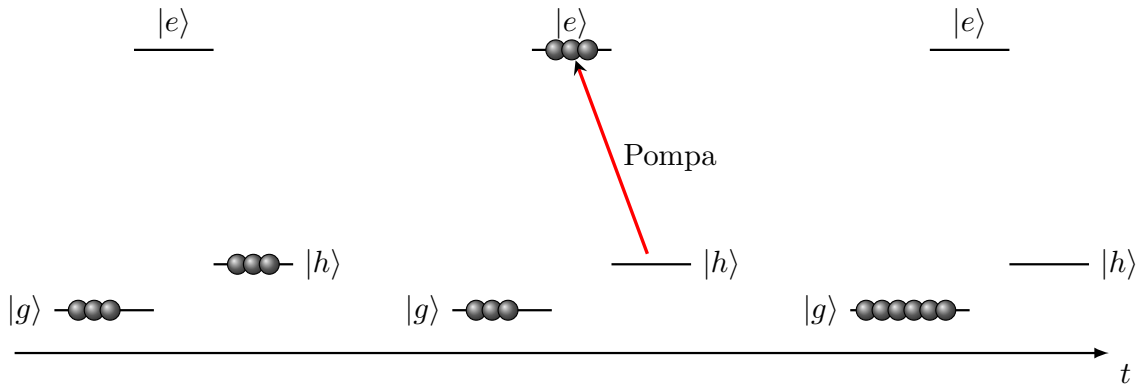
impuls laserowy o wyższej częstotliwości rozprasza się w ośrodku tworząc wzbudzenia (czyli zapis przedstawiony na rys. 5(b)) oraz kreując fotony stokesowskie, które rejestrujemy. Nie mamy wpływu na to, co się zapisało, ponieważ jest to proces spontaniczny. Na podstawie pomiarów fotonów (rys. 5(b)) możemy stwierdzić jakie stany się zapisały w różnych fragmentach komórki. Następnie czekamy, po czym świecimy wiązką odczytującą o mniejszej częstotliwości (rys. 5(c)), która sprowadza ośrodek do poziomu podstawowego i powoduje emisję fotonów antystokesowskich (rys. 5(c)). Te ostatnie są stanami, które możemy użyć dalej, na przykład, do obliczeń kwantowych.

Znając sam protokół, przyjrzyjmy się dokładniej mechanizmom, dzięki którym proces zachodzi. W temperaturze, w której prowadzone są eksperymenty (temperatury rzędu 350 K) obsadzone są obydwa niższe poziomy w stosunku danym przez rozkład Boltzmanna, z dobrym przybliżeniem po równo (obsadzenie stanu wzbudzonego można całkowicie pominąć). Używając wiązki dopasowanej do rezonansu pomiędzy stanami $|h\rangle$ oraz $|e\rangle$ możemy przepompować wszystkie atomy do stanu $|g\rangle$ (rys. 5(a)). Przejście ze stanu podstawowego do stanu $|h\rangle$, zachodzące dzięki rozpraszaniu Ramana, będzie traktowane jako zapis. Przejście odwrotne — jako odczyt.

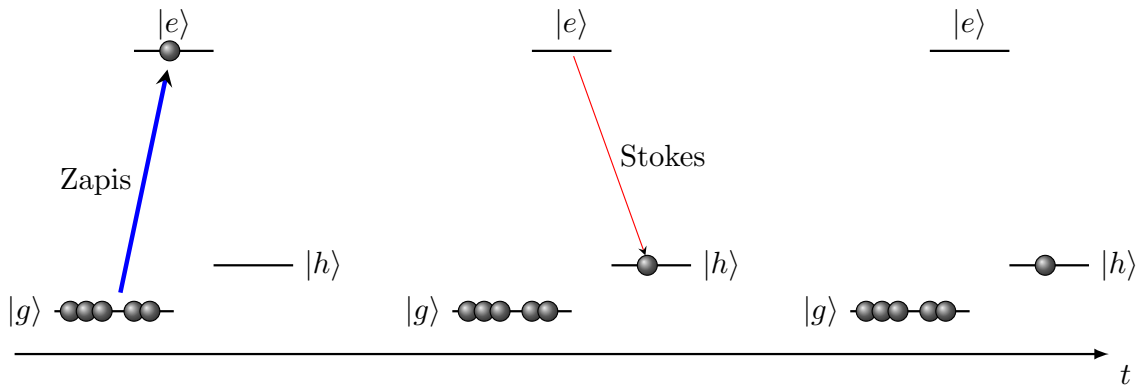
Zatrzymajmy się chwilę przy tym, co się dzieje w ośrodku. Można się zastanowić, który atom został wzbudzony. Okazuje się, że wszystkie, ponieważ wytworzony został stan superpozycji, w którym każdy atom ma szansę być wzbudzony. Dzięki takim stanom kolektywnym (stanom Dicke’a, w których uczestniczą miliony atomów [22]) ośrodek wykazuje jakkolwiek pamięć i jest odporny na dekoherencję. Dzięki temu nie trzeba stosować niskich temperatur. Zwykle cała komórka była opisywana za pomocą stanu separowalnego splątanego. Przeprowadzono eksperymenty, w wyniku których tworzyły się stany splątane dwóch komórek [23].

Zapisywanie w pojedynczej, makroskopowej komórce tylko jednego kubitu wydaje się nieoszczędne. Ekonomiczniej byłoby wykorzystać rozkład przestrzenny wzbudzeń w komórce. W tej pracy założę, że komórka jest długim walcem i podzielę ją na „plastry”, próbując opisać wzbudzenia w poszczególnych fragmentach. Obiekt, który powstanie w takim układzie jest nazywany falą spinową i niesie on ze sobą więcej informacji (w modach) niż pojedynczy spin kolektywny komórki. Jednym z celów tej pracy jest opis ewolucji czasowej oraz przestrzennej fali spinowej. Model można przybliżać jednowymiarowo, o ile liczba Fresnela $F \sim 1$, a ten warunek jest spełniony w układzie. W tym miejscu można zauważyć, że pamięć dotyczy utrzymania korelacji między fotonem uzyskanym przy zapisie, a uzyskanym z rozproszenia przy odczycie. Stany fotonów antystokesowskich są losowe, ale jeżeli wygenerujemy dużą ilość losowych stanów, możemy później wybrać stan, którym jesteśmy zainteresowani (wiedząc, w którym plastrze się znajduje) i go odtworzyć. Pamięć kwantowa jest niejako generatorem kwantowym.

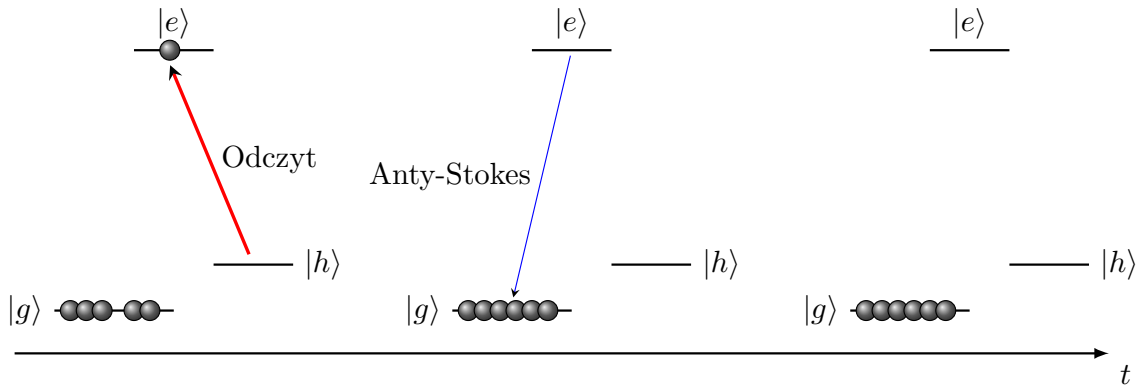
Proces generujący wzbudzenia w ośrodku nazywany jest wymuszonym, nierezonansowym rozpraszaniem Ramana. Nierezonansowym, ponieważ częstotliwość fali różni się od częstotliwości przejścia pomiędzy poziomami. Różnicę tych częstotliwości nazywamy odstrojeniem. Dlaczego jest nazywany wymuszonym? Po wzbudzeniu atom może emitować foton w dowolnym kierunku (emisja



(a) Poziom podstawowy i jemu bliskie są obsadzone zgodnie z rozkładem Boltzmanna. Przyłożenie wiązki laserowej będącej w rezonansie z odpowiednim przejściem powoduje, że cała populacja zajmie stan podstawowy.



(b) Używając wiązki zapisującej, która się rozprasza ramanowsko na atomach, uzyskujemy wzbudzenie oraz foton stokesowski.



(c) Używając wiązki odczytującej, która się rozprasza ramanowsko na atomach, uzyskujemy foton antystokesowski. Wzbudzenie przestaje istnieć — powraca do stanu podstawowego.

Rysunek 5: Schemat działania pamięci kwantowej wraz z opisem poszczególnych etapów w układzie lambda.

spontaniczna). Geometria układu (podłużna, wąska komórka) sprawia, że występuje emisja wymuszona i większość fotonów jest rozproszonych ramanowsko (Stokesa oraz anty-Stokesa) wzdłuż osi komórki. Zastanówmy się dlaczego tworzy się fala spinowa, zamiast powstawania w plastrach losowych wzbudzeń. Następuje to dzięki korelacji wzbudzeń z fotonami. Można się też przekonać (więcej w rozdziale 3.), że wzbudzenia można traktować jak bozony, a te mogą być w tym samym stanie, co prowadzi do grupowania, a tym samym do obsadzania jednego modu fali spinowej.

Gdy wprowadzamy impuls zapisujący bądź odczytujący do ośrodka, początkowo nie ma tam stowarzyszonej z nimi fali o częstości odpowiednio stokesowskiej lub antystokesowskiej. Laser wzbudza atomy, które spontanicznie emitują w losowym kierunku foton. Jeżeli zostanie od wyemitowany wzdłuż osi, emisja wymuszona w dalszej części komórki powoduje zwiększanie natężenia propagującego się impulsu. Tym samym zwiększa szansę na wystąpienie kolejnej emisji wymuszonej w następnym fragmencie komórki, w związku z czym koherencja $g - -h$, czyli fala spinowa narasta.

Cel

Celem tej pracy jest, tak jak już to było wspomniane, opisanie przestrzenno-czasowej ewolucji fali spinowej oraz pól laserowych za pomocą funkcji Greena (propagatorów). Przy opisie zostanie uwzględniony skończony czas życia wzbudzeń, złożona struktura atomowa oraz efekt Starka. Można zauważyć, że dla wielu poziomów atomowych, fala elektromagnetyczna ma różny wpływ na poszczególne rodzaje przejść, ze względu na inne odstrojenia z odpowiednimi przejściami. W szczególności zapis oraz odczyt będą odbywać się jednocześnie. Model uwzględni także wpływ efektu Dopplera na ewolucję układu. Dodatkowo włączone zostaną zderzenia, które powodują, że rozkład prędkości zmieniony przez oddziaływanie z laserem powraca do rozkładu Maxwella. Znając szczegóły ewolucji można dobrać optymalne odstrojenie dla procesu odczytu oraz zapisu.

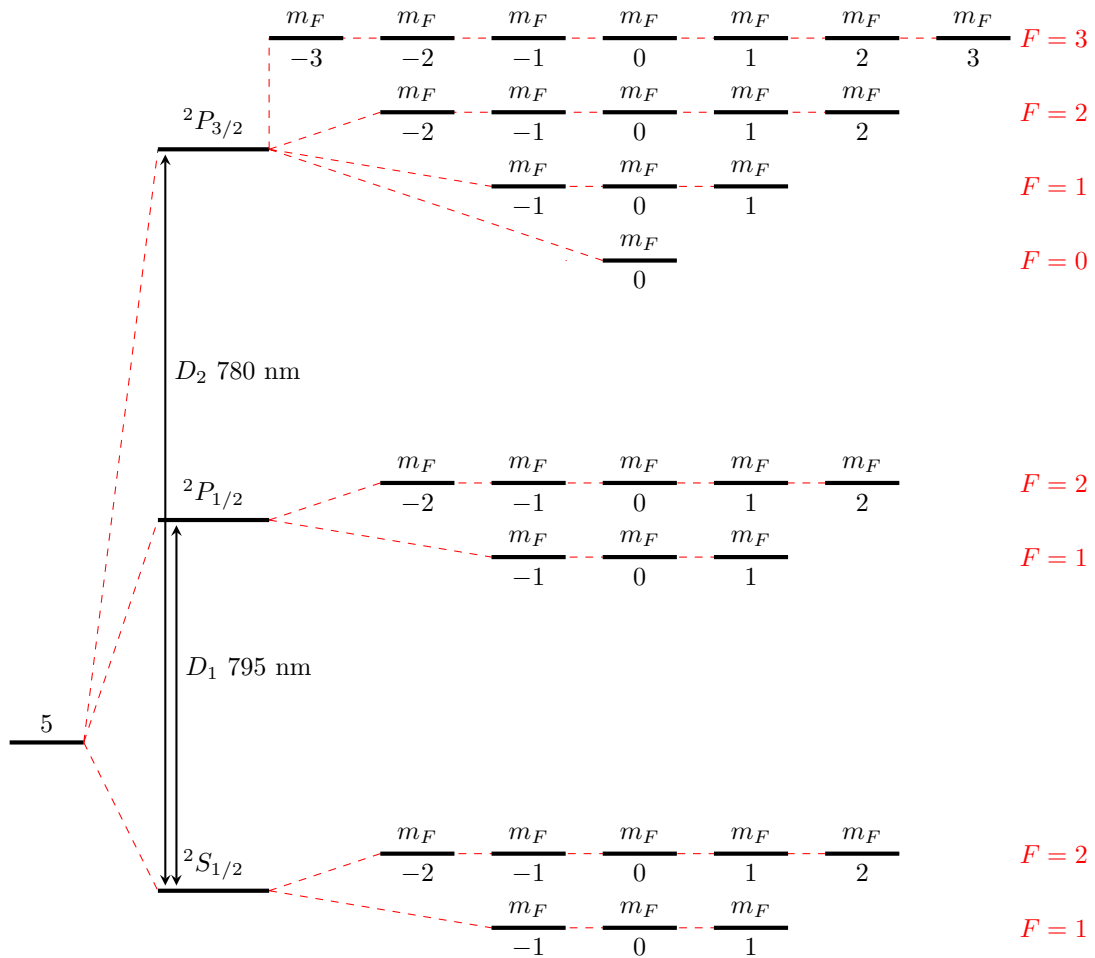
Struktura pracy

W pierwszym rozdziale wprowadzę matematyczny opis modelu Λ , za pomocą którego opiszę atom rubidu. Efektem będzie zestaw równań ewolucji pól świetlnych oraz pola atomowego. Kolejny rozdział poświęcę włączeniu do opisu efektu Dopplera oraz rozwiązaniu zadanej w ten sposób ewolucji. Wynikiem będzie macierz propagatorów, która pozwala mi wyznaczyć postać pól świetlnych oraz pola wzbudzeń atomowych dla zadanych warunków początkowych. W trzecim rozdziale uwzględnię człon kolizyjny i ponownie rozwiążę równania, tym razem biorąc pod uwagę efekty zderzeniowe. W ostatnim, czwartym, rozdziale wprowadzę przestrzeń stanów opisywanego układu oraz skwantuję rozwiązania uprzednio uzyskane. Efektem będzie wyznaczenie wartości średnich pól na stanie próżni.

Rozdział 1

Oddziaływanie atomu z polem

Podstawą działania protokołu pamięci kwantowej jest oddziaływanie atomów z polem. W określonych warunkach to oddziaływanie proporcjonalne do tzw. gęstości optycznej może być bardzo silne [24], co może być pożądane — materia wykazuje większą czułość na pola laserowe, którymi chcemy kontrolować jej własności. Dla przedstawionego na rys. 1.1 schematu poziomów atomu rubidu trudno od razu zaproponować model opisujący całą jego złożoność. Warto na początek uwzględnić tylko te poziomy, które mogą dać wkład do oddziaływania, a po drugie należy wydzielić element składowy, z którego można zbudować całą strukturę.



Rysunek 1.1: Układ poziomów energetycznych rubidu.

Do zagadnień takich jak fluorescencja parametryczna potrzebne jest skwantowanie zarówno

atomu jak i pola elektromagnetycznego. W naszym przypadku — zjawiska Ramana — wystarczy podejście półklasyczne. Kwantujemy atom, natomiast falę elektromagnetyczną opisujemy klasycznie, jako superpozycję fal płaskich, a nie fotonów. Ponadto w doświadczeniu nie operujemy na pojedynczych fotonach, lecz na liczbach rzędu 10^2 fotonów, co stanowi kolejny argument za takim podejściem.

Aby opisać materię, zacznę od układu dwupoziomowego oddziałującego z monochromatyczną falą elektromagnetyczną. W tym rozdziale zastosuję go do opisu atomu dwupoziomowego, następnie do trypoziomowego układu lambda, który efektywnie zredukuje się właśnie do układu dwupoziomowego. Stąd motywacja do zbadania tego pierwszego. W dalszej kolejności pokażę algorytm, pozwalający uwzględnić kolejne poziomy wzbudzone, który efektywnie pozwala rozłożyć strukturę energetyczną atomu rubidu za pomocą modeli dwupoziomowych. Rozdział zamknę wypisując równania różniczkowe na ewolucję czasowo-przestrzenną pól świetlnych oraz pola wzbudzeń atomowych.

1.1. Hamiltonian układu dwupoziomowego

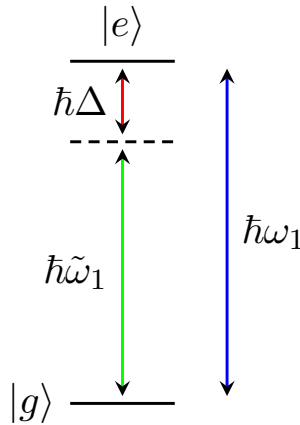
Rozważmy model atomu dwupoziomowego (rys. 1.2) o poziomie podstawowym $|g\rangle$ oraz wzbudzonym $|e\rangle$, który oddziałuje z modem fali elektromagnetycznej o częstotliwości $\tilde{\omega}_1$. Poziom podstawowy będzie poziomem, od którego mierzę energię, a energia poziomu $|e\rangle$ wynosi $\hbar\omega_1$. Różnica między częstotliwością rezonansową przejścia $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$, a częstotliwością fali elektromagnetycznej jest nazywana odstrojeniem i oznaczana jako Δ . Zakładamy, że odstrojenie jest niewielkie w porównaniu z częstotliwością przejścia, czyli $\Delta = \omega_1 - \tilde{\omega}_1 \ll \omega_1$. Hamiltonian układu składa się z części opisującej atom oraz oddziaływanie

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_A(t) + \hat{H}_I(t),$$

gdzie

$$\hat{H}_A(t) = \hbar \cdot 0 |g\rangle \langle g| + \hbar \cdot \omega_1 |e\rangle \langle e| = \hbar\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jest hamiltonianem atomu.



Rysunek 1.2: Układ dwupoziomowy z zaznaczonym poziomem wirtualnym dla odstrojenia Δ częstotliwości fali E-M od częstotliwości rezonansowej ω_1 .

Pole elektryczne (rzeczywiste), jak już było wspomniane, będzie opisane klasycznie:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\vec{A}(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \tilde{\omega}_1 t)} + \vec{A}^*(\vec{r}) e^{i(-\vec{k}\vec{r} + \tilde{\omega}_1 t)} \right).$$

Działamy tutaj w przybliżeniu dipolowym — atom traktujemy punktowo w porównaniu z długością fali $\lambda = \frac{c}{\tilde{\omega}_1}$. Część połowa hamiltonianu jest dana za pomocą sprzężenia dipolowego [25],

którego postać znamy z elektrodynamiki klasycznej, a którą można zapisać w sposób następujący

$$\hat{H}_I(t) = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}(t) = -e\hat{r} \cdot \vec{E}(t),$$

używając operatora położenia $\hat{r}$ ($\hat{d}$ jest operatorem momentu dipolowego). Wyrazy diagonalne operatora momentu dipolowego będą się zerować, ponieważ iloczyn skalarny jest wyrażony poprzez całkę z funkcji nieparzystej:

$$\langle i | e\hat{r} | i \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \psi_i(\vec{r}) \cdot e \cdot \vec{r} \cdot \psi_i^*(\vec{r}) d^3\vec{r} = 0,$$

gdzie $i \in \{e, g\}$ indeksuje poziomy, a $\psi_i(\vec{r}) = \langle \vec{r} | i \rangle$ jest funkcją falową elektronu. Niezerowe będą tylko wyrazy poza diagonalne:

$$d_{ge} = \langle g | e\hat{r} | e \rangle = (d_{eg})^*.$$

Całkowity hamiltonian ma więc postać

$$\hat{H}(t) = \hbar\omega_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \vec{E}(\vec{r}, t) \begin{pmatrix} 0 & d_{ge} \\ d_{eg} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

1.1.1. Przybliżenie wirującej fali

W tej chwili w hamiltonianie jest zależność czasowa związana z polem elektrycznym. Najwygodniej operować równaniami niezależnymi od czasu. W tym wypadku najlepiej użyć tzw. obrazu Diraca¹, który pokazuje ewolucję układu względem ewolucji swobodnej (bez oddziaływania). Transformacja wyraża się następującym wzorem

$$\hat{U} = \exp \left(\frac{-it}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\tilde{\omega}_1 \end{pmatrix} \right)$$

i pozwala uzyskać hamiltonian w obrazie oddziaływania niezależny od czasu

$$\hat{H}_I = \hat{U}^\dagger(t) \hat{H}(t) \hat{U}(t) = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^* \\ \Omega & 2\Delta \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Podczas przekształceń zastosowano przybliżenie wirującej fali — pominięto wyrazy zawierające szybko oscylujące czynniki postaci $e^{\pm i2\tilde{\omega}_1 t}$ oraz $e^{\pm i\omega_1 t}$, które dla długich czasów (w porównaniu z ω_1^{-1}) oddziaływania uśredniają się do zera. Ponadto dokonano podstawienia

$$\Omega = \frac{d_{eg}\vec{A}(\vec{r})}{\hbar},$$

gdzie stała Ω ma wymiar $[s^{-1}]$ i nazywa się częstością Rabiego. Interpretacja fizyczna będzie podana później. Warto zwrócić uwagę, że kwadrat modułu częstości Rabiego jest proporcjonalny do natężenia światła I

$$|\Omega|^2 = \left| \frac{d_{eg}}{\hbar} \right|^2 |\vec{A}(\vec{r})|^2 \sim I.$$

1.1.2. Diagonalizacja

Warto zwrócić uwagę, że hamiltonian w obrazie oddziaływania 1.2 nie jest diagonalny. Trudno się dziwić, bo oddziaływanie z polem elektrycznym zmienia stany własne układu. Wyznamy wartości własne tego hamiltonianu:

$$E_{\pm} = \frac{\hbar}{2} (\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}).$$

¹Inaczej nazywany obrazem oddziaływania.

Wynika z tego, że poziomy się przesunęły pod wpływem oddziaływania. Fizyczne znaczenie mają tylko różnice energii, ponieważ zawsze możemy przesunąć skalę energetyczną, tak aby energia poziomu niższego była jej początkiem. Różnica w tym wypadku wynosi

$$\hbar\sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}. \quad (1.3)$$

Bez pola elektrycznego ($\Omega = 0$) hamiltonian jest diagonalny, a energia poziomu wzbudzonego w obrazie oddziaływania wynosi ($-\hbar\Delta$), natomiast przesunięcie Starka między poziomami w modelu atomu dwupoziomowego dla małych natężeń (to znaczy $I \sim |\Omega|^2 \ll \Delta^2$) wyraża się wzorem

$$\delta E = \hbar\Delta - \hbar\Delta\sqrt{1 + \frac{|\Omega|^2}{\Delta^2}} = \hbar\Delta - \hbar\Delta\left(1 - \frac{|\Omega|^2}{2\Delta^2}\right) = \hbar\frac{|\Omega|^2}{2\Delta}. \quad (1.4)$$

Wynik pokazuje nam, że przesunięcie Starka dla słabych pól jest proporcjonalne do natężenia światła I i odwrotnie proporcjonalne do odstrojenia Δ .

1.1.3. Ewolucja

Mogę rozwiązać równanie Shrödingera dla hamiltonianu (1.2), aby opisać stan

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t)|0\rangle + c_e(t)|1\rangle,$$

gdzie $c_g(t)$ i $c_e(t)$ są zależnymi od czasu współczynnikami opisującymi stan kwantowy. Dla warunków początkowych, w których układ jest w stanie podstawowym — $c_g(t=0) = 1$, $c_e(t=0) = 0$ oraz w rezonansie ($\Delta = 0$) dostajemy periodyczne zmiany obsadzeń stanu podstawowego i wzbudzonego

$$\begin{pmatrix} c_g(t) \\ c_e(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2}t\Omega) \\ -i\sin(\frac{1}{2}t\Omega) \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Zjawisko to nazywamy oscylacjami Rabiego. Inwersja obsadzeń, wyrażona wzorem

$$|c_e(t)|^2 - |c_g(t)|^2 = -\cos(\Omega t),$$

oscyluje z częstością, która w podsekcji 1.1.1 została nazwana częstością Rabiego.

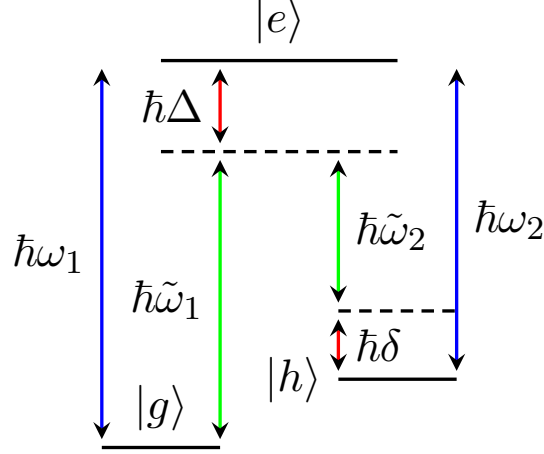
Podsumowując — jeżeli próbkę nieruchomych, izolowanych, dwupoziomowych atomów będziemy oświetlać wiązką, to różnica obsadzeń populacji będzie oscylować. Częstość tych oscylacji nazywamy częstością Rabiego, .

Dla niezerowego odstrojenia częstość oscylacji wzrasta zgodnie z (1.3) do $\sqrt{\Delta^2 + |\Omega|^2}$, a maksymalna wartość modułu współczynnika c_e (oznaczającego udział stanu wzbudzonego) maleje wraz z odstrojeniem.

1.2. Hamiltonian układu trójpoziomowego

Teraz opisany zostanie, analogicznie jak w poprzedniej części, model trójpoziomowego układu lambda (rys. 1.3). Powstał on z rozszerzenia układu dwupoziomowego z rys. 1.2 o poziom $|h\rangle$, który ma niewielką energię w porównaniu z poziomem $|e\rangle$. Podczas odczytu obecne w układzie jest tylko pole odczytujące, a inne możliwe pola mogą powstać na skutek emisji spontanicznej. Ponieważ współczynnik Einsteina A dla spontanicznej emisji jest proporcjonalny do trzeciej potęgi w częstości $A \sim \omega^3$, to przejście $|h\rangle \rightarrow |g\rangle$ jest na tyle mało prawdopodobne, że można je całkowicie pominąć.

Tak jak było wspomniane wcześniej — okaże się, że układ lambda można efektywnie opisać dwuwymiarowym hamiltonianem, gdyż interesują nas tylko przejścia pomiędzy stanami $|g\rangle$ oraz $|h\rangle$, natomiast dynamika krótko żyjącego stanu $|e\rangle$ jest nieistotna, zwłaszcza że realistyczny atom



Rysunek 1.3: Trójpoziomowy układ lambda z zaznaczonymi poziomami wirtualnymi dla odstrożeń Δ oraz δ częstości fali E-M od częstości rezonansowej, odpowiednio, ω_1 oraz ω_2 .

posiada kilka lub kilkanaście poziomów, które pełnią funkcję wzbudzonego poziomu $|e\rangle$. W tym modelu atom będzie oddziaływał z dwiema wiązkami o częstościach $\tilde{\omega}_1$ oraz $\tilde{\omega}_2$, które są zbliżone do częstości rezonansowych ω_1 oraz ω_2 . Jedna z wiązek będzie miała dużą intensywność i będzie nazywana pompą (wiązka odczytująca lub zapisująca). Całkowite pole E-M ma postać:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left(\vec{A}_1(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \tilde{\omega}_1 t)} + \vec{A}_1^*(\vec{r}) e^{i(-\vec{k}\vec{r} + \tilde{\omega}_1 t)} \right) + \frac{1}{2} \left(\vec{A}_2(\vec{r}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \tilde{\omega}_2 t)} + \vec{A}_2^*(\vec{r}) e^{i(-\vec{k}\vec{r} + \tilde{\omega}_2 t)} \right). \quad (1.6)$$

Dla ustalenia uwagi za pompę wybieramy wiązkę o częstości $\tilde{\omega}_2$, amplitudzie pola A_2 i natężeniu proporcjonalnym do $|A_2|^2$, więc zgodnie ze schematem opisanym we wstępie do pracy, będę opisywał **odczyt**. Zamiana ról pompy i słabego pola świetlnego jest stosunkowo prosta i w efekcie otrzymamy zależności opisujące **zapis**.

Hamiltonian układu, analogicznie do równania (1.1) jest następujący

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar(\omega_1 - \omega_2) & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_1 \end{pmatrix} - \hat{d}\vec{E}(\vec{r}, t). \quad (1.7)$$

Stosując analogicznie jak poprzednio przybliżenie wirującej fali, odrzucając wyrazy wirujące z podwojonymi częstościami $2\tilde{\omega}_1$ oraz $2\tilde{\omega}_2$ dostajemy hamiltonian zależny od czasu, której to zależności można się pozbyć używając następującego przekształcenia

$$\hat{U} = \exp \left(\frac{-it}{\hbar} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\tilde{\omega}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\tilde{\omega}_2 \end{pmatrix} \right). \quad (1.8)$$

Ostatecznie hamiltonian niezależny od czasu w obrazie oddziaływania ma postać

$$\hat{H}_I = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_1^* \\ 0 & 2\delta & \Omega_2^* \\ \Omega_1 & \Omega_2 & -2\Delta \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

gdzie odpowiednie stałe są dane następującymi wyrażeniami:

$$\Omega_1 = \frac{d_{eg} A_1(\vec{r})}{\hbar},$$

$$\Omega_2 = \frac{d_{eh} A_2(\vec{r})}{\hbar}.$$

1.2.1. Przybliżenie adiabatyczne

Równanie Schrödingera zapisane dla hamiltonianu (1.9) oraz dla stanu postaci

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t) |g\rangle + c_h(t) |h\rangle + c_e(t) |e\rangle$$

wyraża się następująco

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_g \\ c_h \\ c_e \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_1^* \\ 0 & 2\delta & \Omega_2^* \\ \Omega_1 & \Omega_2 & -2\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_g \\ c_h \\ c_e \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Zwróćmy uwagę, że zjawisko wymuszonego rozpraszania Ramana użyte w protokole pamięci kwantowej charakteryzuje się dużym odstrojeniem w porównaniu z częstością Rabiego, co będzie powodować (1.1.3), że obsadzenie poziomu $|e\rangle$ będzie małe i wartość współczynnika c_e podąża (adiabatycznie) za pozostałymi współczynnikami

$$c_e = c_e(c_h, c_g).$$

Ponadto zakładamy, że czasowa pochodna tego współczynnika wynosi zero.

Wiedząc, że prawa strona trzeciego równania (1.10) ma być równa zero (adiabatyczność), dostajemy wyrażenie²

$$c_e = -\frac{\Omega_1}{2\Delta} c_g - \frac{\Omega_2}{2\Delta} c_h,$$

które po wstawieniu do pozostałych dwóch równań daje równania ewolucji układu

$$\begin{cases} i \frac{\partial c_g}{\partial t} = \frac{|\Omega_1|^2}{4\Delta} c_g + \frac{\Omega_1^* \Omega_2}{4\Delta} c_h \\ i \frac{\partial c_h}{\partial t} = \frac{\Omega_1 \Omega_2^*}{4\Delta} c_g + \left(\frac{|\Omega_2|^2}{4\Delta} + \delta \right) c_h \end{cases}. \quad (1.11)$$

1.2.2. Efektywny hamiltonian układu lambda

Równanie (1.11) można zapisać w bardziej zwarty sposób w postaci

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} c_g \\ c_h \end{pmatrix} = \hat{H}_{\text{eff}} \begin{pmatrix} c_g \\ c_h \end{pmatrix},$$

gdzie efektywny hamiltonian ma postać

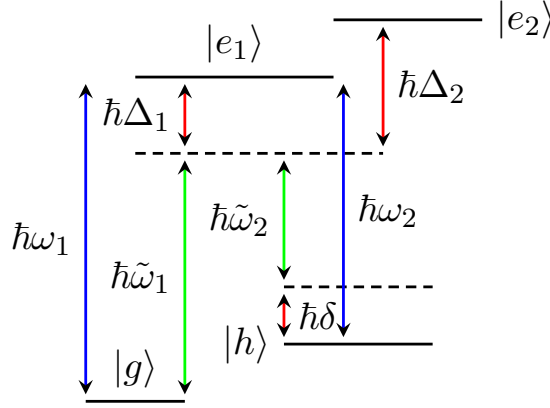
$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \frac{|\Omega_1|^2}{2\Delta} & \Omega_R \\ \Omega_R^* & \frac{|\Omega_2|^2}{2\Delta} + 2\delta \end{pmatrix}.$$

$\Omega_R = \frac{\Omega_1^* \Omega_2}{2\Delta}$ jest nazywana w literaturze dwufotonową częstością Rabiego [26]. Wielkość ta mówi z jaką częstością oscyluje obsadzenie poziomów $|g\rangle$ oraz $|h\rangle$.

Widzimy więc, że przy odpowiednich założeniach (spełnionych w eksperymencie) możemy opisać układ trzypoziomowy efektywnie zapominając o poziomie wzbudzonym, ponieważ interesuje nas tylko oddziaływanie między poziomami $|g\rangle$ oraz $|h\rangle$.

1.2.3. Uogólnienie na wiele poziomów wzbudzonych

Poprzednie sekcje pokazały, że zwiększając złożoność modelu tak, aby oddawał fizykę rozpraszania Ramana, matematycznie sytuacja się bardzo nie komplikuje. Układ lambda jest zbyt prostym układem, żeby opisać atom rubidu, więc w tej sekcji pokażę do czego sprowadza się dodawanie kolejnych poziomów wzbudzonych.



Rysunek 1.4: Czteropoziomowy układ z zaznaczonymi poziomami wzbudzonymi $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$ oraz wirtualnymi dla odstrojeń odpowiednio Δ_1 oraz Δ_2 od częstości rezonansowej ω_1 oraz ω_2 .

Rozważmy więc podwójny układ lambda rys. 1.4, o wspólnych poziomach $|g\rangle$ i $|h\rangle$, który posiada dwa poziomy wzbudzone — $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$. Niech różnica energii ich poziomów wyniesie $\hbar(\Delta_2 - \Delta_1)$. Odstrojenie $\hbar\tilde{\omega}_1$ od poziomu $|e_2\rangle$ będzie wynosić $\hbar\Delta_2$. Częstości fal elektromagnetycznych pozostają bez zmian.

Hamiltonian tego atomu będzie miał postać

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar(\omega_1 - \omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar(\omega_1 + \Delta_2 - \Delta_1) \end{pmatrix}.$$

Przybliżenie wirującej fali (analogicznie jak przy otrzymywaniu wzoru 1.9) daje następujący hamiltonian oddziaływania

$$\hat{H}_I = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega_1^* & \Omega_1'^* \\ 0 & -2\delta & \Omega_2^* & \Omega_2'^* \\ \Omega_1 & \Omega_2 & 2\Delta_1 & 0 \\ \Omega_1' & \Omega_2' & 0 & 2\Delta_2 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Ten wynik wykorzystam w dalszej części. Najpierw pokażę jak wygląda opis ewolucji ze stratami (dekoherencją).

1.3. Równanie Liouville'a-von Neumanna

Wiemy już jak opisywać układ o różnym poziomie skomplikowania (i tym samym różnej precyzji opisu rzeczywistości) — jesteśmy w stanie wypisać hamiltonian. Celem pracy jest znalezienie opisu propagacji fali świetlnej oraz wzbudzeń (czyli fali spinowej) w komórce z parami rubidu, więc w następnym kroku należy wyznaczyć równania ewolucji układu, którego hamiltonian właśnie poznaliśmy. Przez ewolucję układu mam na myśli ewolucję pól laserowych oraz wzbudzeń atomowych — zależności czasowej i przestrzennej. Zacznę od przypomnienia opisu stanów oraz ich ewolucji.

1.3.1. Macierz gęstości

Stan układu kwantowego zapisujemy w postaci wektora przestrzeni Hilberta (na przykład za pomocą notacji Diraca). Możemy to robić, pod warunkiem, że obiekt jest w stanie czystym.

²Obsadzenie stanu wzbudzonego $|e\rangle$ zgodnie z oczekiwaniami maleje ze wzrostem odstrojenia Δ .

Czasami generując stany możemy realizować kilka różnych możliwości (nazywamy taki stan *mieszanym*) $|\psi_i\rangle$, z różnymi prawdopodobieństwami p_i . Aby uwzględnić to w opisie, używa się macierzy gęstości

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|.$$

Jak interpretować wyrazy w macierzy gęstości? Jeżeli jesteśmy pewni, że stan, który otrzymujemy w urządzeniu jest czysty i jest postaci $|\psi\rangle = \alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$, Wtedy macierz gęstości ma postać

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}.$$

Wyrazy diagonalne $|\alpha|^2$ oraz $|\beta|^2$ opisują prawdopodobieństwo wystąpienia układu w stanie $|a\rangle$ lub $|b\rangle$ po dokonaniu pomiaru. Łatwo zauważyć, że suma wyrazów diagonalnych musi wynosić jeden, ponieważ układ w jakimś stanie musi się znajdować, co można zapisać formalnie za pomocą śladu macierzy

$$\text{Tr } \hat{\rho} = 1.$$

Jest to słuszne dla dowolnej macierzy gęstości. Z kolei wyrazy pozadiagonalne opisują koherencje, czyli ilościowo opisują jaką część układu znajduje się w superpozycji. Można zauważyć, że gdy układ przestaje być w superpozycji ($\alpha = 0$ lub $\beta = 0$), wtedy wyrazy pozadiagonalne $\hat{\rho}$ znikają.

1.3.2. Ewolucja

Ewolucja układu jest opisywana przez równanie Schrödingera dla stanów czystych $|\psi\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle,$$

natomiast dla stanów mieszanych opisywanych macierzą gęstości ρ mamy równanie Liouville’a-von Neumanna

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}(t)]. \quad (1.13)$$

Wyrażenia te opisują ewolucję układu hamiltonowskiego, którego energia jest zachowana. Układy rzeczywiste są dalekie od takiej ewolucji. Na skutek zderzeń oraz ogólnie wpływu otoczenia układ doznaje dekoherencji — koherencja jest tracona.

Aby poprawnie opisać nasz układ użyjemy fenomenologii, dzięki której opiszemy zbiorczo zjawiska powodujące dekoherencję. Będzie się to sprowadzało do dodatkowego wyrazu w równaniu (1.13) postaci $-\frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{\rho})$, gdzie

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}$$

dla układu lambda. W ogólności dla n poziomowego układu z $n - 2$ poziomami wzbudzonymi dostajemy n wymiarową macierz diagonalną, której pierwsze dwa elementy wynoszą γ , a reszta Γ .

Źródłem dekoherencji może być nieznany rozkład pól powodujący ewolucję, której nie jesteśmy w stanie przewidzieć. Innym powodem tracenia informacji o układzie jest pojawianie się nowych cząstek w układzie (na przykład dyfuzja cząstek przypisanych do innych plasterków komórki par rubidu) czy też uciekanie cząstek z układu. Część informacji tracimy, gdy foton ze wzbudzenia atomowego nie jest oddany do układu podczas wymuszonej emisji, która wymusza mody świetlne w osi układu, lecz zostaje wyświecony w losowym kierunku podczas emisji spontanicznej. Stała zaniku $\Gamma = \frac{2\pi}{T}$ jest związana ze skończonym czasem życia T poziomu $|e\rangle$. Długość

życia poziomu $|h\rangle$ jest bardzo długi, ponieważ energia tego poziomu jest niewiele większa od poziomu podstawowego (zgodnie z sekcją 1.2), więc można pominąć spontaniczne emitowanie fotonów z tego poziomu. Nie przyjmujemy jednak $\gamma = 0$, gdyż chcemy uwzględnić dekoherencję na skutek dyfuzji atomów.

Równanie ewolucji uwzględniające dekoherencję będzie miało postać

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] - \frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}\hat{\rho}). \quad (1.14)$$

Będzie się ono niezwykle komplikować wraz z uwzględnianiem kolejnych poziomów wzbudzonych, zatem po pierwsze spróbuję zredukować opis ewolucji do układu dwuwymiarowego (okazuje się, że da się tak zrobić dla dowolnej liczby poziomów), korzystając z eliminacji adiabatycznej. Uproszczenia można dokonać przy założeniu dużej wartości odstrojenia. W tym celu przybliżamy wyrazy diagonalne macierzy gęstości dla poziomów wzbudzonych (oznaczające obsadzenia danego poziomu) za równe zero. Pochodne czasowe koherencji poziomów wzbudzonych również przyjmujemy równe zero. Same koherencje będą zależne od pozostałych wyrazów macierzy (będą do nich dążyć adiabaticznie). Wynoszą one

$$\rho_{eg} = \frac{i}{\Gamma + 2i\Delta} \rho_{hg} \Omega_2 \quad (1.15)$$

oraz

$$\rho_{eh} = \frac{i}{\Gamma + 2i\Delta} \rho_{gh} \Omega_1. \quad (1.16)$$

Trzy poziomy

Po zastosowaniu całej wyżej wymienionej, rachunkowo dosyć uciążliwej, procedury dla układu opisanego hamiltonianem (1.9) dostajemy następujące efektywne wyrażenie

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \frac{\Delta^2}{\Delta^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \left(-\frac{\hbar}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{|\Omega_1|^2}{2\Delta} & \Omega_R \\ \Omega_R^* & \frac{|\Omega_2|^2}{2\Delta} \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\delta \end{pmatrix}.$$

Podobnie efektywna dekoherencja ma postać

$$\hat{\Gamma}_{\text{eff}} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{|\Omega_1|^2}{2\Delta} & \Omega_R \\ \Omega_R^* & \frac{|\Omega_2|^2}{2\Delta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Warto w tym miejscu przypomnieć, że zakładaliśmy, że $\gamma \ll \Gamma$ oraz $\delta \ll \Delta$.

Mając opis efektywny macierzy gęstości postaci

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{gh} \\ \rho_{gh}^* & \rho_{hh} \end{pmatrix}$$

można korzystając ze wzoru (1.14) znaleźć ewolucję elementu ρ_{hg}

$$\frac{\partial \rho_{hg}}{\partial t} = -\frac{1}{2} \rho_{hg} \left(2(\gamma + i\delta) + \frac{|\Omega_1|^2}{\Gamma + 2i\Delta} + \frac{|\Omega_2|^2}{\Gamma - 2i\Delta} \right) - \frac{\Omega_1^* \Omega_2 \rho_{gg}}{2(\Gamma - 2i\Delta)} - \frac{\Omega_1^* \Omega_2 \rho_{hh}}{2(\Gamma + 2i\Delta)}$$

Dobierając odpowiednio odstrojenie dwufotonowe δ można skasować wyraz pochodzący z przesunięcia Starka (patrz równanie (1.4))

$$\frac{|\Omega_1|^2}{\Gamma + 2i\Delta} + \frac{|\Omega_2|^2}{\Gamma - 2i\Delta}$$

jednak to się stosuje tylko w wypadku występowania dobrze określonej, jednej częstotliwości w ośrodku. Rozważę ogólniejszy przypadek, gdy $\delta = 0$ mając na uwadze uwzględnienia wkrótce

poszerzenia Dopplera. Kolejnym krokiem w celu uproszczenia równań jest przyjęcie $\gamma = 0$, ponieważ większy wpływ ma dekoherencja związana z poziomami wzbudzonymi. Ponadto Ω_2 jest związane z pompą, więc zachodzi $|\Omega_1|^2 \ll |\Omega_2|^2$.

Stosując przybliżenia, o których była mowa wyżej dostajemy ostatecznie

$$\frac{\partial \rho_{hg}}{\partial t} = -\frac{\Omega_1^* \Omega_2}{2(\Gamma - 2i\Delta)} \rho_{gg} - \frac{\Omega_1^* \Omega_2}{2(\Gamma + 2i\Delta)} \rho_{hh} - \frac{|\Omega_2|^2}{2(\Gamma - 2i\Delta)} \rho_{hg}. \quad (1.17)$$

Równanie na ewolucję pola dostaniemy analizując makroskopową polaryzację ośrodka, która jest określona wzorem

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = n \langle \vec{d} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{d}),$$

gdzie n jest koncentracją atomów. Wyznaczając tę wartość należy pamiętać, że pole E-M składa się z fal o dwóch częstościach ω_1 i ω_2 , więc polaryzacja będzie sumą czynników $\vec{P}_1$ i $\vec{P}_2$ związanych z odpowiednimi częstościami. Wartość oczekiwana momentu dipolowego powinna być rzeczywista (ponieważ jest obserwowalną), więc powinniśmy wziąć odpowiednią zespoloną część z tej wartości. Aby dowiedzieć się, która będzie odpowiednia, należy przedstawić macierz gęstości w obrazie Schrödingera i wybrać czynniki z dodatnią częstością promieniowania, które analizujemy. Do przekształcenia użyjemy macierzy przejścia podanej w równaniu (1.8). Wiedząc, że zachodzi poniższa równość

$$\text{Tr}(\hat{U} \rho \hat{U}^\dagger \hat{d}) = e^{-it\tilde{\omega}_1} d_{ge} \rho_{eg} + e^{it\tilde{\omega}_1} d_{eg} \rho_{ge} + e^{-it\tilde{\omega}_2} d_{he} \rho_{eh} + e^{it\tilde{\omega}_2} d_{eh} \rho_{he}, \quad (1.18)$$

wiemy, że powinniśmy wybrać tylko pierwszy wyraz, ponieważ dotyczy dodatnich częstości fali związanej z częstością ω_1 .

Zatem ostatecznie (w dalszym ciągu będziemy działać w obrazie oddziaływania)

$$\vec{P}_1 = n d_{ge} \rho_{eg} = i \frac{n d_{ge}}{\Gamma + 2i\Delta} \rho_{hg} \Omega_2,$$

gdzie za wartość ρ_{eg} podstawiliśmy wielkość (1.15) wyznaczoną podczas procedury przybliżenia adiabaticznego.

Z drugiej strony istnieje związek

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = i \frac{\tilde{\omega}_1}{2c\epsilon_0} P_1,$$

który można otrzymać z przybliżenia wyrażania na równanie falowe w ośrodku [27], zakładając że zmiany amplitudy pola są znaczne na odległościach dużo większych niż długość fali elektromagnetycznej. Zbierając powyższe wzory otrzymamy

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial z} = -\frac{n |d_{eg}|^2 \tilde{\omega}_1}{\hbar c \epsilon_0} \frac{\rho_{hg} \Omega_2}{(\Gamma + 2i\Delta)}. \quad (1.19)$$

Wiele poziomów

Mogę ten sam rachunek wykonać dla atomu czteropoziomowego korzystając z hamiltonianu wprowadzonego dla dwóch poziomów wzbudzonych (1.12). Okazuje się, że stosując całą procedurę dostajemy ten sam wynik co dla wersji trójpoziomowej, z wyjątkiem tego, że musimy sumować odpowiednie wyrazy dla poziomów wzbudzonych

$$\frac{\partial \rho_{hg}}{\partial t} = -\rho_{gg} \sum_e \frac{(\vec{A}_1^* \cdot \vec{d}_{eg}^*)(\vec{A}_2 \cdot \vec{d}_{eh})}{2(\Gamma - 2i\Delta_e) \hbar^2} - \rho_{hh} \sum_e \frac{(\vec{A}_1^* \cdot \vec{d}_{eg}^*)(\vec{A}_2 \cdot \vec{d}_{eh})}{2(\Gamma + 2i\Delta_e) \hbar^2} - \sum_e \frac{|\vec{A}_2 \cdot \vec{d}_{eh}|^2}{2(\Gamma - 2i\Delta_e) \hbar^2} \rho_{hg} \quad (1.20a)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = -\frac{n\tilde{\omega}_1}{\hbar c \epsilon_0} \rho_{hg} \sum_e \frac{A_2 d_{he}^* d_{eg}^*}{(\Gamma + 2i\Delta_e)}, \quad (1.20b)$$

gdzie jako Δ_e oznaczono odstrojenie lasera A_2 od rezonansu z poziomem wzbudzonym $|e\rangle$. Więcej informacji o wyrażeniach we wzorze (1.20a) przy obsadzeniach stanów ρ_{gg} oraz ρ_{hh} można znaleźć w Dodatku A.

1.4. Równania pól

1.4.1. Odczyt

Celem jest wyznaczenie ewolucji czasowej i przestrzennej pól elektromagnetycznych oraz wzbudzeń atomowych. Te ostatnie są opisywane przez element macierzowy ρ_{hg} . Przekształćmy równania (1.20) do postaci wygodniejszej w użyciu. Pamięć kwantową można realizować na dwa sposoby (zarówno stan podstawowy może mieć większość populacji, a stan $|h\rangle$ być pusty, jak i sytuacja odwrotna także może być realizowana). Dla ustalenia przyjmijmy, że rozważamy sytuację, że $\rho_{gg} = 1$ oraz $\rho_{hh} = 0$. Odczyt lub zapis otrzymamy zmieniając częstotliwość lasera. Zaczniemy od odczytu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{hg}}{\partial t} &= -\sum_e \frac{(\vec{A}_1^* \cdot \vec{d}_{eg}^*)(\vec{A}_2 \cdot \vec{d}_{eh})}{2(\Gamma - 2i\Delta_e)\hbar^2} - \sum_e \frac{|\vec{A}_2 \cdot \vec{d}_{eh}|^2}{2(\Gamma - 2i\Delta_e)\hbar^2} \rho_{hg} \\ \frac{\partial A_1}{\partial z} &= -\frac{n\tilde{\omega}_1}{\hbar c \epsilon_0} \rho_{hg} \sum_e \frac{A_2 d_{he}^* d_{eg}^*}{2(\Gamma + 2i\Delta_e)}, \end{aligned}$$

Warto zwrócić uwagę, że szybkość zmiany koherencji atomowej ρ_{hg} zależy od natężeń wiązek laserowych, co jest dosyć intuicyjne. Bliżej rezonansu zmiana koherencji powinna być szybsza i tak też faktycznie jest poprzez zależność Δ^{-1} . Podobnie analizując drugie równanie można było się spodziewać proporcjonalności zmian amplitudy pola antystokesowskiego do koncentracji atomów oraz amplitudy pompy. Wszelkie wielkości dotyczące odczytu będą oznaczane literami R (ang. *read*).

Aby uprościć dalsze rozważania dokonamy zmiany oznaczeń

$$R(z, t) = A_1(z, t)$$

$$B^*(z, t) = \rho_{hg}(z, t) \sqrt{\frac{n\tilde{\omega}}{\hbar \epsilon_0 c}}$$

do równań (1.20). $R(z, t)$ będzie opisywać pole elektryczne (fotony rozpraszania antystokesowskiego), natomiast $B(z, t)$ będzie polem wzbudzeń koherencji atomowej. Częstość $\tilde{\omega}$ jest średnią arytmetyczną dwóch częstości laserowych $\tilde{\omega}_1$ oraz $\tilde{\omega}_2$. Zastąpienie częstości pól świetlnych ich średnią jest dobrym przybliżeniem.

Ostatecznie równania pól mają następującą postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^*(z, t)}{\partial z} &= c_{R'}(\Delta) B(z, t) \\ \frac{\partial B(z, t)}{\partial t} &= c_R(\Delta) R^*(z, t) - s_R(\Delta) B(z, t), \end{aligned} \quad (1.22)$$

gdzie współczynniki $c_{\Delta R}$ oraz $s_{\Delta R}$ są wyrażone następującymi wzorami

$$\begin{aligned} c_{R'}(\Delta) &= -\sqrt{\frac{n\tilde{\omega}}{\hbar c \epsilon_0}} \sum_e \frac{A_2^* d_{he} d_{eg}}{2(\Gamma - 2i\Delta_{ge})\hbar^2} \\ c_R(\Delta) &= -\sqrt{\frac{n\tilde{\omega}}{\hbar c \epsilon_0}} \sum_e \frac{A_2 d_{he}^* d_{eg}^*}{2(\Gamma - 2i\Delta_{ge})\hbar^2} \end{aligned}$$

$$s_R(\Delta) = \sum_e \frac{|A_2 d_{eh}|^2}{2(\Gamma - 2i\Delta_{ge})\hbar^2},$$

gdzie dla przypomnienia A_2 oznaczało amplitudę pompy. Powyższe wyrażenia sprawiają, że współczynniki $c_R(\Delta)$ oraz $c_{R'}(\Delta)$ wykazuje liniową zależność z amplitudą pola, natomiast współczynnik $s_R(\Delta)$ wykazuje liniową zależność w natężeniu pola. Dla podkreślenia, że odstrojenie jest liczone pomiędzy poziomem $|g\rangle$, a odpowiednim poziomem wzbudzonym $|e\rangle$ wprowadziłem oznaczenie Δ_{ge} .

Pierwsze równanie wyraża fakt, że pole elektryczne jest zależne od pola wzbudzeń, ponieważ wzbudzone atomy będą emitować fotony. Drugie równanie mówi, że koherencja będzie zmieniać się z czasem i zależy ono od natężenia światła laserowego. Należy pamiętać, że równania te opisują dwa procesy — pochłanianie częstości $\tilde{\omega}_2$ przez atomy oraz deekscytacja wzbudzeń, a więc emitowanie fotonów o tej samej częstości.

Możemy jakościowo sprawdzić, że równania (1.22) są poprawne podstawiając jedno do drugiego. Uzyskany współczynnik $c_R(\Delta)c_{R'}(\Delta)$ jest ujemny, ze względu na zależność $\Gamma \ll \Delta$. Ujemny współczynnik oznacza zmniejszanie się koherencji, co nie powinno być zaskakujące w procesie odczytu.

1.4.2. Zapis

Odwroćcie sytuacji, tak by otrzymać zapis jest stosunkowo proste. Wystarczy przyjąć, że pompą jest wiązka o częstości $\tilde{\omega}_1$. Dodatkowo należy pamiętać, aby wszelkie odstrojenia liczyć od poziomu podstawowego $|g\rangle$, a nie od $|h\rangle$, jak przy odczycie. Wszelkie wielkości dotyczące odczytu (w tym pole elektryczne $A_2(z, t)$) będą oznaczane literami W (ang. *write*). Dostajemy analogiczny komplet równań do (1.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} &= c_W(\Delta)B(z, t) \\ \frac{\partial B(z, t)}{\partial t} &= c_W^*(\Delta)W(z, t) - s_W(\Delta)B(z, t). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Współczynniki są wyrażone wzorami

$$\begin{aligned} c_W(\Delta) &= -\sqrt{\frac{n\tilde{\omega}}{\hbar c \epsilon_0}} \sum_e \frac{A_1 d_{2e} d_{eg}^*}{2(\Gamma - 2i\Delta_{he})\hbar^2} \\ s_W(\Delta) &= \sum_e \frac{|A_1 d_{eg}|^2}{2(\Gamma + 2i\Delta_{he})\hbar^2}. \end{aligned}$$

Zależność z polami laserowymi jest analogiczna jak przy odczycie. Oznaczenie Δ_{he} oznacza odstrojenie pomiędzy poziomem $|h\rangle$, a poziomem wzbudzonym $|e\rangle$. Jakościowo możemy zobaczyć, że łącząc równania (1.23) w jedno uzyskamy dodatni współczynnik $|c_W(\Delta)|^2$, co oznacza, że koherencja przy zapisie rośnie, tak jak byśmy chcieli.

Rozdział 2

Efekt Dopplera

Poniższy rozdział będzie poświęcony uwzględnieniu w równaniach ewolucji pól efektu Dopplera. Do tej pory zakładaliśmy, że atomy są nieruchome. W rzeczywistości poruszają się one ze średnią prędkością około $200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, a rozkład prędkości jest opisywany przez rozkład Maxwella.

Efekt Dopplera jest obserwowany, gdy częstość fali odbieranej przez obserwatora jest inna niż częstość emitowana przez źródło, w sytuacji gdy źródło lub obserwator się poruszają. Zjawisko to dotyczy także fal elektromagnetycznych. Dla światła częstość ω_o odbierana przez obserwatora zależy od częstości emitowanej ω_e w sposób następujący

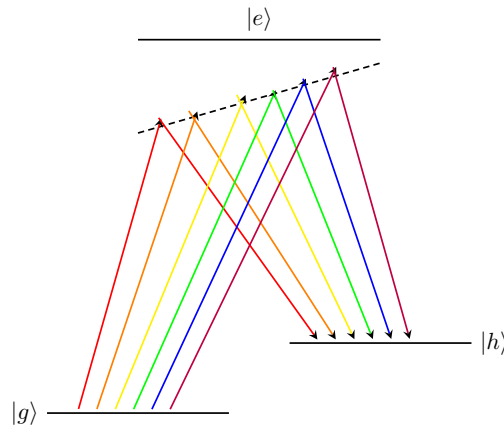
$$\omega_o = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \omega_e,$$

gdzie $\beta = \frac{v}{c}$ jest stosunkiem prędkości względnej źródła i obserwatora do prędkości światła. W tej pracy mówiąc o prędkościach cząstek będę zwykle posługiwał się miarą odstrojenia, która jest w optyce bardziej naturalna. Zależność pomiędzy odstrojeniem i prędkością wyraża się następującym wzorem

$$\Delta = \omega_1 - \omega_e \sqrt{\frac{c - v}{c + v}},$$

gdzie ω_e oznacza częstość wiązki zapisującej lub odczytującej, a v jest prędkością atomu w układzie laboratorium.

W układzie odniesienia poruszającego się atomu foton ma energię większą lub mniejszą (w zależności od kierunku poruszania się cząsteczki) niż w układzie laboratoryjnym. W związku z



Rysunek 2.1: Diagram przedstawiający zmianę odstrojenia lasera dla cząstek znajdujących się w różnych klasach prędkości na skutek efektu Dopplera.

tym zmienia się odstrojenie lasera od poziomów wzbudzonych. Sytuacja jest przedstawiona na rysunku 2.1, gdzie różnymi kolorami rozróżniono przejścia dla cząstek o różnych prędkościach.

2.1. Obecność jednego pola laserowego

Na początek zapiszę równania uwzględniające efekt Dopplera dla pola zapisującego, a następnie je rozwiążę używając funkcji Greena. Rozwiązanie to przyda się do uzyskania pełnego opisu zjawisk zachodzących w komórce pamięci.

Równania pól, które zaproponuję na podstawie równania (1.23) będą następujące

$$\begin{aligned}\frac{\partial B(z, t, \Delta)}{\partial t} &= c_W^*(\Delta)W(z, t) - s_W(\Delta)B(z, t, \Delta) \\ \frac{\partial W(z, t)}{\partial z} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(v)c_W(\Delta)B(z, t, \Delta),\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie

$$f_M(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$$

jest jednowymiarowym rozkładem Maxwella. Przedstawienie go za pomocą zmiennej Δ jest trywialne

$$f_M(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\Delta^2}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma_\Delta^2}\right),$$

gdzie σ_Δ jest szerokością rozkładu i jej wartość dla rubidu w temperaturze $300K$ wynosi około 240MHz . W tej reprezentacji rozkład będzie używany w dalszej części pracy. Warto zwrócić uwagę, że pierwsze z równań (2.1) opisuje zmianę koherencji w czasie i przestrzeni dla grupy atomów o prędkości związanej z odstrojeniem Δ . Jedyną różnicą w porównaniu z poprzednim rozdziałem jest właśnie ta zależność. Drugie równanie, przedstawiające ewolucję pola elektrycznego, sumuje (całkuje) wkłady od cząstek z różną prędkością, ważone rozkładem Maxwella. Drugie równanie bierze pod uwagę to, że fala w komórce składa się z fal emitowanych przez wszystkie atomy poruszające się z różnymi prędkościami.

Pierwsze równanie poprzez dodatkową zależność od Δ staje się dużo bardziej skomplikowane niż bez tej zależności. W wersji dyskretnej, gdyby założyć, że istnieje tylko n klas prędkości, zamieniło by się na n równań. Układ równań (2.1) opisuje tylko zapis, można je jednak rozwiązać dla odczytu biorąc równania (1.22).

Jedną z metod, którą można posłużyć się do rozwiązania równania (2.1) jest metoda propagatorów, w której stan końcowy można znaleźć odcałkowując stan początkowy z pewną funkcją Greena (nazywaną propagatorem, ponieważ propaguje rozwiązanie, zwykle w czasie lub przestrzeni). W eksperymencie mierzone są pola świetlne, więc najlepiej będzie wyznaczyć $W(z, t)$, ponieważ funkcja nie zależy od Δ , a ponadto nie można mierzyć wzbudzeń bezpośrednio.

W tym celu możemy wyznaczyć $B(z, t, \Delta)$ odcałkowując pierwsze równanie po czasie

$$B(z, t, \Delta) = e^{-s_W(\Delta)t}B(z, 0, \Delta) + \int_0^t e^{-s_W(\Delta)(t-t')}c_W^*(\Delta)W(z, t')dt'$$

i wstawić do drugiego

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial z} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta)c_W(\Delta) \left(e^{-s_W(\Delta)t}B(z, 0, \Delta) + \int_0^t e^{-s_W(\Delta)(t-t')}c_W^*(\Delta)W(z, t')dt' \right).$$

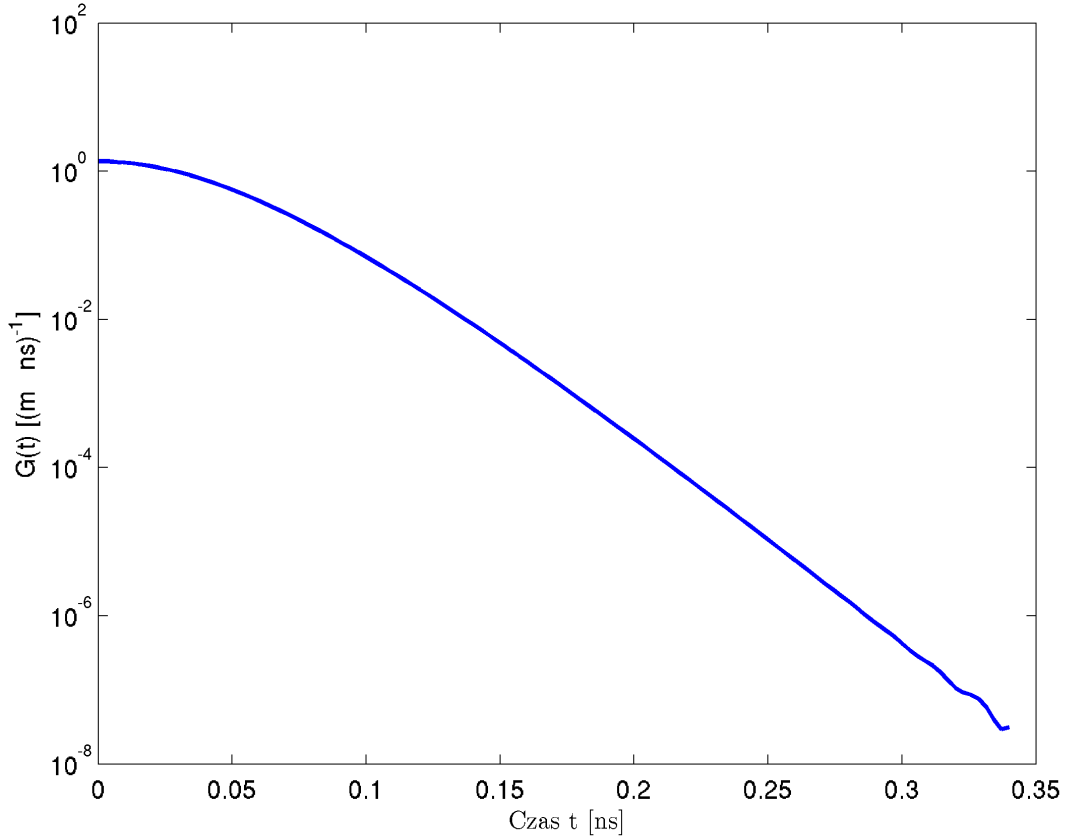
Można tę równość zapisać jako

$$\frac{\partial W(z, t)}{\partial z} = \int_0^t dt' G(t-t')W(z, t') + \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta)c_W(\Delta)B(z, 0, \Delta)e^{-s_W(\Delta)t},\tag{2.2}$$

gdzie propagatorem (funkcją Greena) jest

$$G(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) |c_W(\Delta)|^2 \exp(-s_W(\Delta)(t - t')). \quad (2.3)$$

Widać w równaniu (2.3) skąd obiekt, jakim jest propagator zawdzięcza swoją nazwę — przenosi rozwiązania z początkowej do zadanej chwili czasu. Kwadrat funkcji Greena $|G(t - t')|^2$ możemy interpretować jako prawdopodobieństwo tego, że foton będący w komórce w czasie t' pozostanie tam dalej w czasie t . Za sprawą oddziaływania światła z atomami komórki można się spodziewać, że im większy czas upłynie, tym większa szansa, że foton zostanie pochłonięty, więc prawdopodobieństwo będzie maleć. Rozwiązanie w postaci analitycznej równania (2.2) jest bardzo skomplikowane, więc zastosuję analizę numeryczną. Wstawiając fizyczne parametry (zestawienie parametrów używanych podczas symulacji w dodatku B), można wyznaczyć funkcję $G(t - t')$ w funkcji czasu t , przyjmując za chwilę początkową czas $t' = 0$. Typowy przebieg dla szerokiego zakresu odstrojeń (w oddali od rezonansów) przedstawiono na rys. 2.2. Zgodnie z przecuciem, amplituda funkcji będzie maleć.



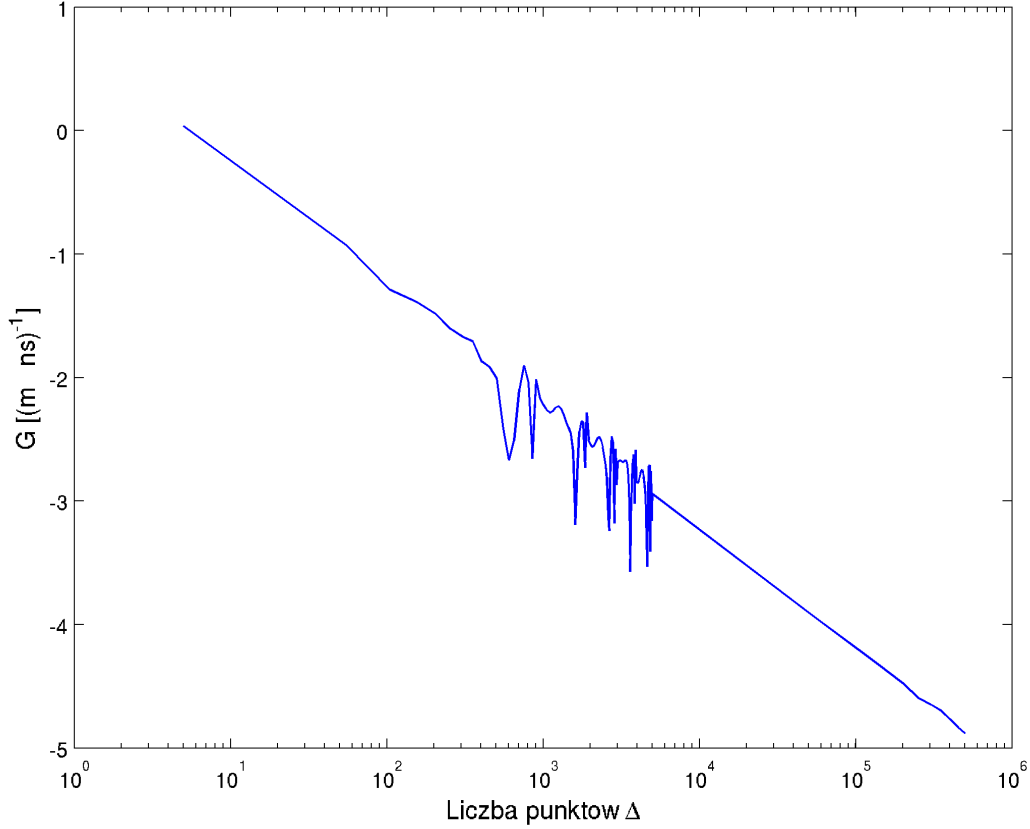
Rysunek 2.2: Zależność modułu propagatora $|G(t)|$ proporcjonalnego do amplitudy prawdopodobieństwa wygenerowania fotonu w czasie oddziaływania t .

Wykres, jak widać, składa się w dobrym przybliżeniu z prostej, co ze względu na skalę półlogarytmiczną może nas skłonić, aby przybliżyć propagator funkcją eksponencjalną postaci

$$G(t) \approx a_1 e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (2.4)$$

Po wnikliwym sprawdzeniu ostatniego fragmentu krzywej z rysunku 2.2, okazuje się, że druga część prostej widocznej na rysunku jest zależna od gęstości siatki odstrojenia Δ . Mianowicie

wraz ze wzrostem gęstości, moment, w którym pojawia się odchylenie od prostej zmniejsza się, co pozwala nam sądzić, że w granicy ciągłego całkowania wyniesie zero. Najprawdopodobniej nie jest to żaden efekt fizyczny. Sytuację wpływu gęstości siatki można zaobserwować na rys. 2.3.



Rysunek 2.3: Zależność amplitudy propagatora G , przy której widać błędy numeryczne, od gęstości próbkowania odstrojeń Δ . Malejący charakter zależności sugeruje, że jest on artefaktem związanym z numerycznym całkowaniem.

Z tego względu przybliżono funkcję $G(t)$ za pomocą funkcji wykładniczej

$$G(t) \approx a_1 e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (2.5)$$

Dyskusję wyboru funkcji eksponencjalnej przeprowadzono w sekcji 2.3.

2.2. Obecność dwóch pól laserowych

Wiedząc jak wygląda sytuacja związana z odstrojeniem, łatwo zauważyć, że ten sama wiązka będzie mogła brać udział zarówno w zapisie jak i w odczycie. Pełny opis układu będzie połączeniem równań (1.22) oraz (1.23), a wkład do pola wzbudzeń będzie pochodził zarówno od odczytu jak i od zapisu. Układ ten, z uwzględnionym odstrojeniem, będzie miał postać

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R^*(z, t)}{\partial z} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) c_{R'}(\Delta) B(z, t, \Delta) \\
\frac{\partial W(z, t)}{\partial z} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) c_W(\Delta) B(z, t, \Delta) \\
\frac{\partial B(z, t, \Delta)}{\partial t} &= c_W^*(\Delta) W(z, t) + c_R(\Delta) R^*(z, t) + \\
&\quad - \underbrace{(s_R(\Delta) + s_W(\Delta))}_{s(\Delta)} B(z, t, \Delta).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

2.2.1. Mechanizm strat

Przypominając sobie postać wzorów $s_R(\Delta)$ i $s_W(\Delta)$ z końca rozdziału 1 można zauważyć, że wyrażenia te są niemal swoim sprzężeniem zespolonym. W związku z tym parametr $s(\Delta)$, nazywane przesunięciem różnicowym będzie miało istotny wkład do propagatora. Stała zaniku $s(\Delta)$, ze względu na pozostałą część rzeczywistą liczby, będzie odpowiadała za zanik wzbudzeń wskutek dekoherencji.

Rozpraszanie Ramana, które jest podstawą zaproponowanego protokołu pamięci kwantowej, jest procesem wymuszonym. Odbywa się dzięki temu, że w ośrodku są obecne pola optyczne oraz pole wzbudzeń. Za straty odpowiedzialne są procesy, które powodują, że światło wychodzi poza oś komórki i nie jest rejestrowane przez detektory. Emisja spontaniczna jest procesem losowym, który zachodzi w ośrodku i który powoduje utratę informacji, ponieważ światło jest emitowane w dowolnym kierunku. W braku pól na początku procesu, fotony z emisji spontanicznej, które są emitowane w osi, inicjują wymuszone rozpraszanie Ramana. Uwzględniając straty w równaniu Liouville'a (1.13) użyto zawyżonego parametru Γ , który zawiera w sobie straty z całej emisji spontanicznej, mimo że w badanym procesie jest to sfera z wyłączeniem osi (na osi występuje emisja wymuszona, wzmacniająca koherencję). Przybliżenie do całej sfery jednak funkcjonuje bardzo dobrze. Warto zwrócić uwagę, że parametr $s(\Delta)$, którego część rzeczywistą można traktować jako odwrotność czasu półtrwania wzbudzeń atomowych, jest proporcjonalny do natężenia światła. Jest to zrozumiałe, ponieważ głównym czynnikiem powodującym dekoherencję jest emisja spontaniczna, która rośnie liniowo z natężeniem światła.

2.2.2. Diagonalizacja równań

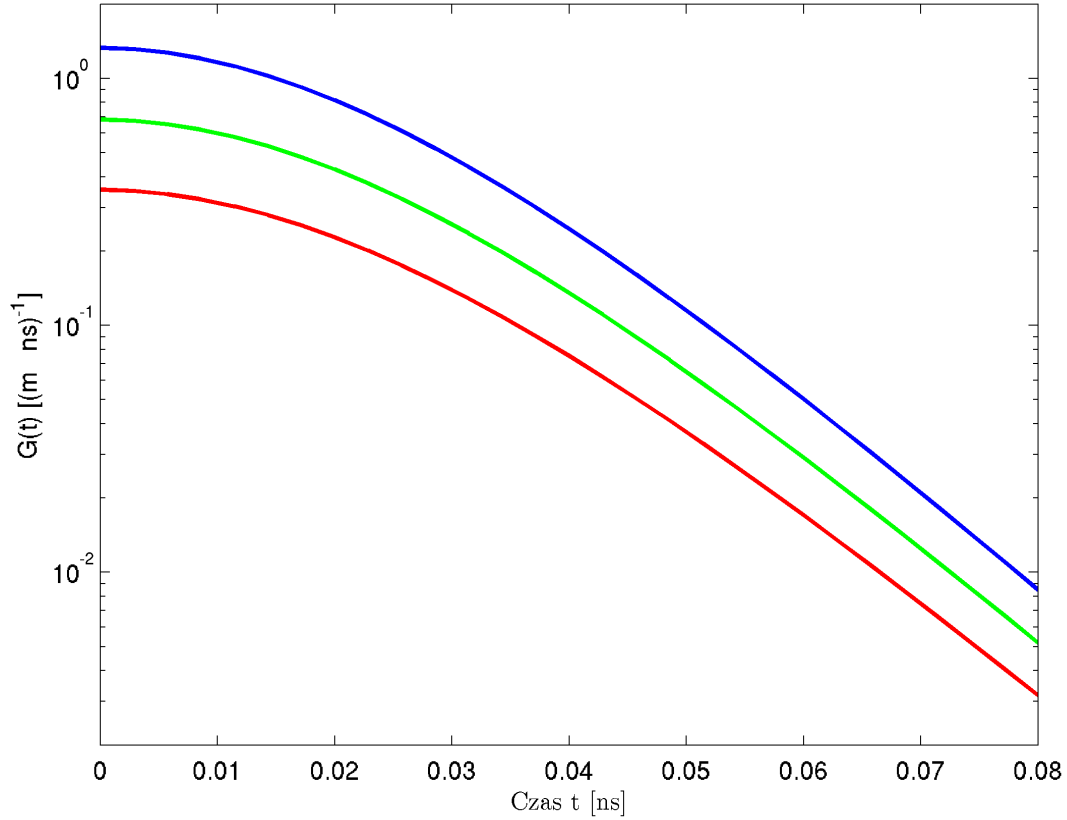
Używając metody z sekcji 2.1, mogę wyznaczyć równania ewolucji pól optycznych całkując koherencję $B(z, t, \Delta)$, a następnie wstawiając wynik do równań na pola $R^*(z, t)$ i $W(z, t)$. Otrzymujemy następujący układ równań

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} R^*(z, t) \\ W(z, t) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \begin{pmatrix} c_{R'}(\Delta) \\ c_W(\Delta) \end{pmatrix} f_M(\Delta) B(z, 0, \Delta) e^{-s(\Delta)t} + \int_0^t dt' \hat{\mathbb{G}}(t - t') \begin{pmatrix} R^*(z, t') \\ W(z, t') \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

gdzie $\hat{\mathbb{G}}(t - t')$ jest macierzą propagatorów daną wzorem

$$\hat{\mathbb{G}}(t - t') = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) e^{-s(\Delta)(t-t')} \begin{pmatrix} c_{R'}(\Delta) c_R(\Delta) & c_{R'}(\Delta) c_W^*(\Delta) \\ c_W(\Delta) c_R(\Delta) & |c_W(\Delta)|^2 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Wzorem poprzedniej sekcji przyjrzymy się wykreślonym funkcjom elementów propagatora (2.8) na rysunkach 2.4 oraz 2.5. Obliczenia wykonano dla dwóch skrajnie różnych odstrojeń. Pierwsze z nich, odstrojenie do niższych częstotliwości, jest bliższe przejściu $|h \rightarrow e\rangle$, zatem spodziewamy się odczytu. Drugie odstrojenie, do wyższych częstotliwości, jest bliższe przejściu $|g \rightarrow e\rangle$, czyli powinno opisywać zapis.



Rysunek 2.4: Wartości modułów amplitud wyrazów macierzy propagatora $\hat{\mathbb{G}}$ dla odstrojenia $\Delta = 2000$ Mhz. Elementy pozadiagonalne są zaznaczone kolorem zielonym, natomiast diagonalne — kolorami czerwonym i niebieskim. Amplituda zapisu (niebieska krzywa) jest kilkukrotnie większa niż amplituda odczytu (czerwona krzywa).

Badając numerycznie przestrzeń parametrów odstrojenia można się przekonać, że z dużą dokładnością, pomijając numeryczny szum, kąty nachylenia prostych są niemal identyczne, więc zanik wszystkich czterech elementów $\hat{\mathbb{G}}$ jest podobny. W związku z tym można dokonać następującego przybliżenia

$$\hat{\mathbb{G}}(t - t') \approx \hat{\mathbb{G}}_0 e^{-\frac{t-t'}{T}} = \begin{pmatrix} g_{RR} & g_{RW} \\ g_{WR} & g_{WW} \end{pmatrix} e^{-\frac{t-t'}{T}},$$

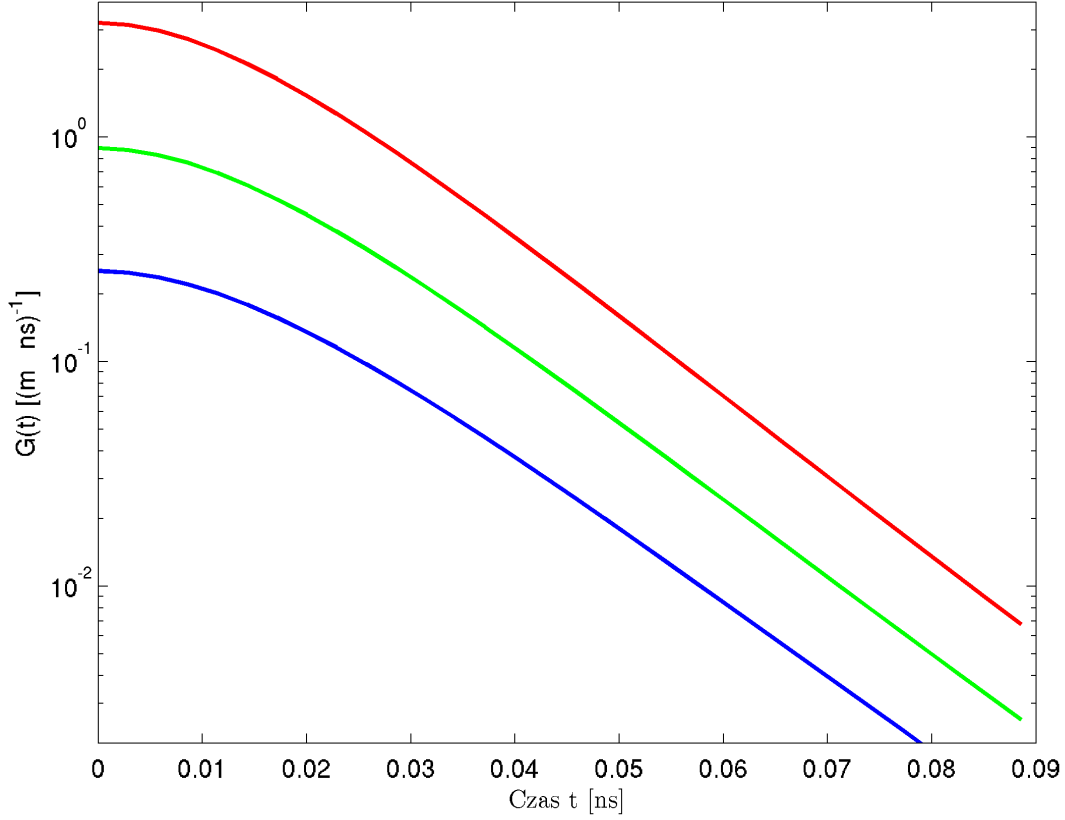
gdzie T jest parametrem zaniku wyznaczanym z dopasowania jednocześnie do czterech krzywych modułu propagatora¹. Podobnie należy dopasować wartości współczynników macierzy $\hat{\mathbb{G}}_0$. Współczynniki są stałe w czasie, zależą jedynie od odstrojenia.

Znalezienie rozwiązań równań postaci (2.7) jest dosyć skomplikowane, dlatego prościej będzie przejść do bazy, w której $\hat{\mathbb{G}}$ jest diagonalna.

Zmieniając bazę na diagonalną, układ równań (2.7) będzie się separował na dwa niezależne od siebie równania. Macierz zmiany bazy dla każdej wartości odstrojenia musi być policzona osobno. Diagonalizacja oznacza znalezienie takiej macierzy

$$\hat{\mathbb{U}} = \begin{pmatrix} U_{RR} & U_{RW} \\ U_{WR} & U_{WW} \end{pmatrix},$$

¹Tak naprawdę dopasowanie odbywa się jednocześnie do pięciu funkcji, które wykazują podobną charakterystykę zaniku. Piąta funkcja B_{Tot} będzie przedstawiona w dalszej części rozdziału.



Rysunek 2.5: Wartości modułów amplitud wyrazów macierzy propagatora $\hat{\mathbb{G}}$ dla odstrojenia $\Delta = -900$ Mhz. Elementy pozadiagonalne są zaznaczone kolorem zielonym, natomiast diagonalne — kolorami czerwonym i niebieskim. Amplituda odczytu (czerwona krzywa) jest kilkukrotnie większa niż amplituda zapisu (niebieska krzywa).

dla której zachodzi

$$\hat{\mathbb{G}}_0 = \hat{\mathbb{U}}^{-1} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \hat{\mathbb{U}}.$$

Ponadto zachodzi zależność pomiędzy starymi, a nowymi współrzędnymi

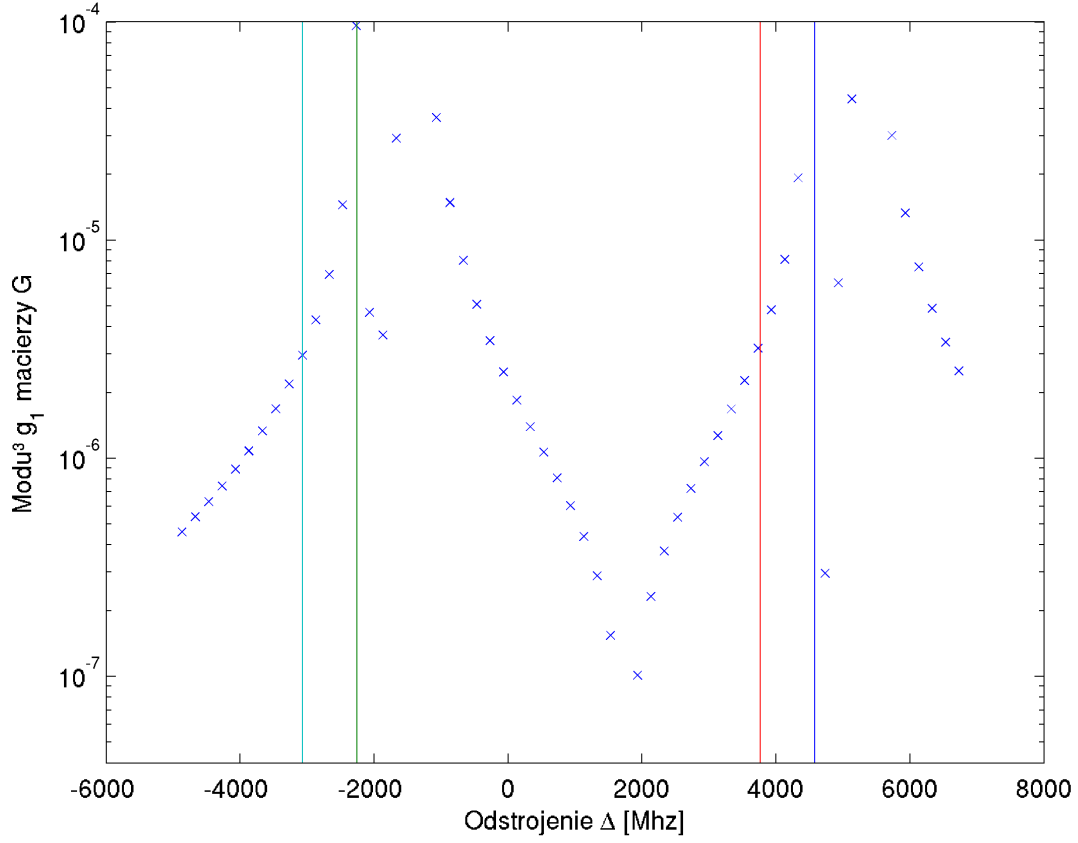
$$\begin{pmatrix} R'^* \\ W' \end{pmatrix} = \hat{\mathbb{U}} \begin{pmatrix} R^* \\ W \end{pmatrix}.$$

Badając przykładowe wartości elementów macierzowych można zauważyć, że dla całego interesującego doświadczalnie zakresu odstrojeń zachodzi silna nierówność $g_2 \ll g_1$ lub odwrotnie (w zależności okolicy którego z dwóch rezonansów badamy). Poprzez zmianę kolejności wektorów własnych można drugą sytuację sprowadzić do $g_2 \ll g_1$. Zależność parametrów g_1 oraz $a = g_2/g_1$ od odstrojenia Δ można zobaczyć na wykresach 2.6 oraz 2.7. Formalnie prowadzi to do poniższego

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} = g_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \approx g_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że układ dwóch równań redukuje się do równania

$$\frac{\partial}{\partial z} R'^*(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta c'_{R'}(\Delta) f_M(\Delta) B(z, 0, \Delta) e^{-s(\Delta)t} + \int_0^t dt' g_1 \exp\left(-\frac{t-t'}{T}\right) R'^*(z, t'). \quad (2.9)$$



Rysunek 2.6: Zależność modułu wartości własnej g_1 macierzy $\hat{\mathbb{G}}_0$ od odstrojenia Δ . Pionowymi liniami zaznaczono częstości rezonansowe przejść D_1 rubidu.

Drugie równanie jest prostsze w rozwiązaniu i nim zajmiemy się na początek

$$\frac{\partial}{\partial z} W'(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta c'_W(\Delta) f_M(\Delta) B(z, 0, \Delta) e^{-s(\Delta)t}.$$

Koherencja $B(z, t = 0, \Delta)$ nie zależy od prędkości atomów, a wkłady od poszczególnych klas prędkości mają rozkład Maxwella. Śledząc zachowanie całek

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \begin{pmatrix} c'_{R'}(\Delta) \\ c'_W(\Delta) \end{pmatrix} f_M(\Delta) e^{-s(\Delta)t} \approx \begin{pmatrix} \kappa_R \\ \kappa_W \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{T}}$$

możemy dokonać analogicznego przybliżenia jak w przypadku macierzy $\hat{\mathbb{G}}_0$, dobierając numerycznie mnożnik odpowiednio κ_R lub κ_W oraz parametr zaniku T , który okazuje się identyczny jak we wcześniejszym przypadku. Otrzymujemy wtedy

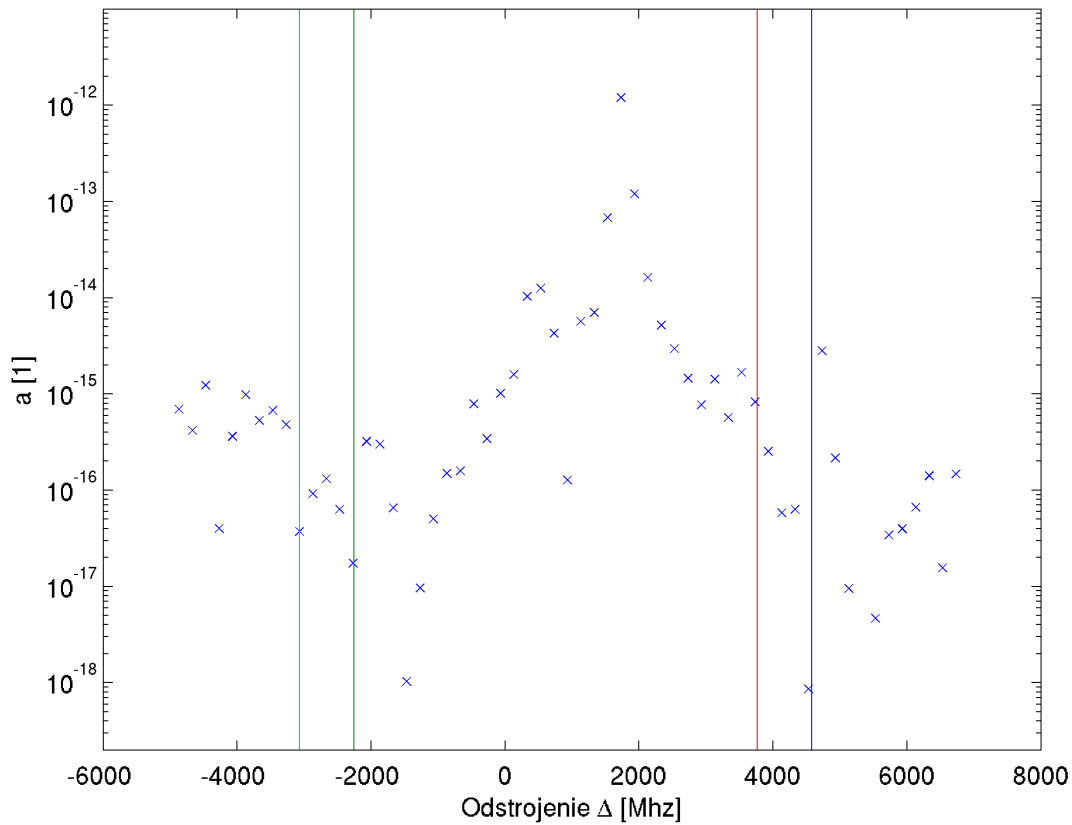
$$W'(z, t) = W'(0, t) + \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_W e^{-\frac{t}{T}}.$$

2.2.3. Rozwiązanie w przestrzeni Laplace'a

Mając już rozwiązanie prostszego równania, możemy przejść do równania (2.9). Podobne do niego równanie zostało rozwiązane w dodatku w pracy [28], poniżej zostaną użyte te same metody.

Aby je rozwiązać zastosujemy obustronnie transformatę Laplace'a ze względu na czas. Transformata Laplace'a jest zdefiniowana dla funkcji $f(t)$ następującym wzorem

$$F(s) = (\mathcal{L}f)(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$



Rysunek 2.7: Zależność stosunku modułów wartości własnych $a = |\frac{g_2}{g_1}|$ macierzy $\hat{\mathbb{G}}_0$ od odstrojenia Δ . Pionowymi liniami zaznaczono częstotliwości rezonansowe przejść D_1 rubidu.

Po zastosowaniu tej operacji do równania (2.9) otrzymujemy prostsze do rozwiązania równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} R'^*(z, s) &\approx \mathcal{L} \left\{ B(z, 0) \kappa_R e^{-\frac{t}{T}} \right\} + \frac{g_1}{s + \frac{1}{T}} R'^*(z, s) \\ &= B(z, 0) \kappa_R \frac{1}{s + \frac{1}{T}} + \frac{g_1}{s + \frac{1}{T}} R'^*(z, s). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Przy obliczeniach skorzystałem z poniższych własności transformaty

$$\mathcal{L} \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{s} F(s),$$

$$\mathcal{L}(e^{at} f(t)) = F(s - a)$$

oraz

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s) \cdot G(s).$$

Otrzymane równanie (2.10) nie jest równaniem całkowym, lecz stosunkowo prostym równaniem różniczkowym zwyczajnym z niejednorodnością w postaci funkcji $f(z, s)$. Rozwiązanie przyjmuje postać

$$R'^*(z, s) = \left[R'^*(0, s) + \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_R \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \exp \left(-\frac{g_1 z'}{s + \frac{1}{T}} \right) \right] \exp \left(\frac{g_1 z}{s + \frac{1}{T}} \right). \quad (2.11)$$

Przechodząc z powrotem do zmiennej czasowej, stosując obustronnie odwrotną transformatę Laplace'a otrzymamy rozwiązanie. Pierwsza część równania (2.11) jest rozwiązana w sposób następujący

$$\begin{aligned} R^*(z, t) &= \dots + \mathcal{L}^{-1} \left(R^*(0, s) \exp \left(\frac{g_1 z}{s + \frac{1}{T}} \right) \right) = \\ &= \dots + \int_0^t dt' R^*(0, t') \exp \left(-\frac{t-t'}{T} \right) \left(\sqrt{\frac{g_1 z}{t-t'}} I_1(2\sqrt{(t-t')g_1 z}) + \delta(t-t') \right) \end{aligned}$$

gdzie I_n oznacza zmodyfikowaną funkcję specjalną Bessela n -tego rodzaju [29]. Zachowanie wykresów funkcji specjalnych zerowego i pierwszego rodzaju w pobliżu zera można zobaczyć na rysunku 2.8. Funkcja ta rośnie w przybliżeniu eksponencjalnie. Argumentem funkcji w naszym przypadku jest iloczyn czasu oddziaływania oraz odległości, na której laser oddziałuje z ośrodkiem. Nieograniczone narastanie nie występuje w rzeczywistym układzie, ponieważ w pewnym momencie załamują się założenia i stosowane przez nas przybliżenia.

Drugi składnik równania (2.11) ma następującą transformatę

$$\begin{aligned} R^*(z, t) &= \dots + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_R \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \exp \left(\frac{g_1(z-z')}{s + \frac{1}{T}} \right) \right\} = \\ &= \dots + -e^{-\frac{t}{T}} \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_R I_0(2\sqrt{tg_1(z-z')}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Całkowite rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} R^*(z, t) &= R^*(0, t) + \int_0^t dt' R^*(0, t') \exp \left(-\frac{t-t'}{T} \right) \sqrt{\frac{g_1 z}{t-t'}} I_1(2\sqrt{(t-t')g_1 z}) + \\ &\quad -e^{-\frac{t}{T}} \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_R I_0(2\sqrt{tg_1(z-z')}). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Znając postać rozwiązań pól $W'(z, t)$ oraz $R^*(z, t)$, a także macierzy przejścia $\hat{\mathbb{U}}$ mogą wyznaczyć ewolucję pola wzbudzeń $B(z, t, \Delta)$. Zanim wypiszę rozwiązania wprowadzę oznaczenie, które zwiększy czytelność wzoru. Niech

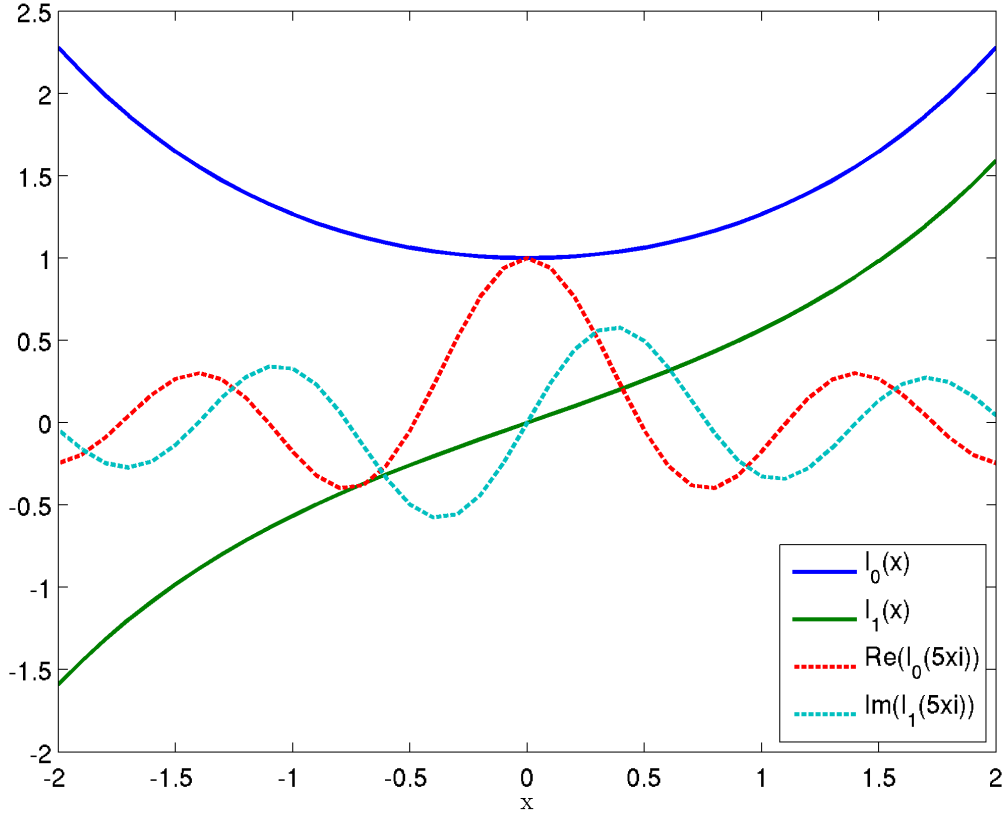
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(t, z) &= e^{-\frac{t}{T}} \sqrt{\frac{g_1 z}{t}} I_1(2\sqrt{tg_1 z}) \\ \mathcal{F}_2(t, z) &= e^{-\frac{t}{T}} I_0(2\sqrt{tg_1 z}). \end{aligned}$$

Używając tego oznaczenia rozwiązania pól przedstawiają się następująco

$$\begin{aligned} R^*(z, t) &= R^*(0, t) + U_{\text{RW}}^{-1} \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_W e^{-\frac{t}{T}} + \\ &\quad -U_{\text{RR}}^{-1} \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_R \mathcal{F}_2(t, z-z') + \\ &\quad +U_{\text{RR}}^{-1} \int_0^t dt' (U_{\text{RR}} R^*(0, t') + U_{\text{RW}} W(0, t')) \mathcal{F}_1(t-t', z) \\ W(z, t) &= W(0, t) + U_{\text{WW}}^{-1} \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_W e^{-\frac{t}{T}} + \\ &\quad -U_{\text{WR}}^{-1} \int_0^z dz' B(z', 0) \kappa_R \mathcal{F}_2(t, z-z') + \\ &\quad +U_{\text{WR}}^{-1} \int_0^t dt' (U_{\text{RR}} R^*(0, t') + U_{\text{RW}} W(0, t')) \mathcal{F}_1(t-t', z). \end{aligned}$$

Wstawiając powyższe rozwiązania do wyrażenia na pole wzbudzeń

$$B(z, t, \Delta) = e^{-s(\Delta)t} B(z, 0, \Delta) + \int_0^t dt' e^{-s(\Delta)(t-t')} (c_R(\Delta) R^*(z, t') + c_W^*(\Delta) W(z, t'))$$



Rysunek 2.8: Zachowanie funkcji $I_0(x)$ oraz $I_1(x)$ w pobliżu zera dla $g_1 > 0$ (linia ciągła) oraz dla $g_1 < 0$ (linia przerywana).

dostają następujące wyrażenie

$$\begin{aligned}
 B(z, t, \Delta) = & e^{-s(\Delta)t} B(z, 0, \Delta) + \int_0^t dt' e^{-s(\Delta)(t-t')} (c_R(\Delta) R^*(0, t') + c_W^*(\Delta) W(0, t')) + \\
 & + (c_R(\Delta) U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WW}^{-1}) \kappa_W \int_0^z dz' B(z', 0) \frac{T}{1 - Ts(\Delta)} (e^{-ts(\Delta)} - e^{-\frac{t}{T}}) + \\
 & - (c_R(\Delta) U_{RR}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WR}^{-1}) \kappa_R \int_0^z dz' B(z', 0) \times \\
 & \times \left[\mathcal{F}_3(t, z - z') + \int_0^t dt' e^{-s(\Delta)(t-t')} \left(\frac{1}{T} - s(\Delta) \right) \mathcal{F}_3(t', z - z') \right] + \\
 & + (c_R(\Delta) \kappa_W U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) \kappa_R U_{WR}^{-1}) \int_0^t dt' (U_{RR} R^*(0, t') + U_{RW} W(0, t')) \times \\
 & \times \left[-e^{-s(\Delta)t'} + e^{-\frac{t'}{T}} I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) + \left(\frac{1}{T} - s(\Delta) \right) e^{-s(\Delta)t'} \int_0^{t'} dt'' e^{-t''(\frac{1}{T} - s(\Delta))} I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) \right].
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

W powyższym wyrażeniu przyjęto następujące oznaczenie:

$$\mathcal{F}_3(t, z) = e^{-\frac{t}{T}} \left(\sqrt{\frac{t}{g_1 z}} I_1(2\sqrt{t g_1 z}) \right).$$

Wzór (2.14) jest dokładnym wyrażeniem. W praktyce powód zaniku koherencji to przede wszystkim emisja spontaniczna, co formalnie oznacza

$$s(\Delta) \approx \frac{1}{T}.$$

Powoduje to, że możemy dokonać uproszczenia:

$$\begin{aligned}
B(z, t, \Delta) = & e^{-\frac{t}{T}} B(z, 0, \Delta) + \int_0^t dt' e^{-\frac{t-t'}{T}} (c_R(\Delta) R^*(0, t') + c_W^*(\Delta) W(0, t')) + \\
& + (c_R(\Delta) U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WW}^{-1}) \kappa_W \int_0^z dz' B(z', 0) t e^{-\frac{t}{T}} + \\
& - (c_R(\Delta) U_{RR}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WR}^{-1}) \kappa_R \int_0^z dz' B(z', 0) \mathcal{F}_3(t, z - z') + \\
& + (c_R(\Delta) \kappa_W U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) \kappa_R U_{WR}^{-1}) \int_0^t dt' (U_{RR} R^*(0, t') + U_{RW} W(0, t')) e^{-\frac{t'}{T}} (I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) - 1).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Wzór w dalszym ciągu wygląda skomplikowanie, więc zapiszmy go w postaci

$$\begin{aligned}
B(z, t, \Delta) = & \int_0^z dz' \left(B(z', 0) \alpha(z - z', t, \Delta) + e^{-\frac{t}{T}} B(z', 0, \Delta) \delta(z - z') \right) \\
& + \int_0^t dt' \left(R^*(0, t') \beta(z, t', \Delta) + W(0, t') \gamma(z, t', \Delta) \right),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

gdzie odpowiednie funkcje są dane jako

$$\begin{aligned}
\alpha(z - z', t, \Delta) = & (c_R(\Delta) U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WW}^{-1}) \kappa_W t e^{-\frac{t}{T}} + \\
& - (c_R(\Delta) U_{RR}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WR}^{-1}) \kappa_R \mathcal{F}_3(t, z - z')
\end{aligned}$$

$$\beta(z, t', \Delta) = e^{-\frac{t-t'}{T}} c_R(\Delta) + (c_R(\Delta) \kappa_W U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) \kappa_R U_{WR}^{-1}) U_{RR} e^{-\frac{t'}{T}} (I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) - 1)$$

$$\gamma(z, t', \Delta) = e^{-\frac{t-t'}{T}} c_W^*(\Delta) + (c_R(\Delta) \kappa_W U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) \kappa_R U_{WR}^{-1}) U_{RW} e^{-\frac{t'}{T}} (I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) - 1). \tag{2.17}$$

Postać ewolucji pól światła

$$\begin{aligned}
R^*(z, t) = & \int_0^z dz' B(z', 0) \alpha_R(z - z', t) + \\
& + \int_0^t dt' \left[R^*(0, t') (\beta_R(z, t - t') + \delta(t - t')) + W(0, t') \gamma_R(z, t - t') \right]
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\alpha_R(z - z', t) = \kappa_W U_{RW}^{-1} e^{-\frac{t}{T}} - \kappa_R U_{RR}^{-1} e^{-\frac{t}{T}} I_0(2\sqrt{t g_1 (z - z')})$$

$$\beta_R(z, t - t') = U_{RR}^{-1} U_{RR} e^{-\frac{t-t'}{T}} \sqrt{\frac{g_1 z}{t - t'}} I_1(2\sqrt{(t - t') g_1 z})$$

$$\gamma_R(z, t - t') = U_{RR}^{-1} U_{RW} e^{-\frac{t-t'}{T}} \sqrt{\frac{g_1 z}{t - t'}} I_1(2\sqrt{(t - t') g_1 z})$$

$$\begin{aligned}
W(z, t) = & \int_0^z dz' B(z', 0) \alpha_W(z - z', t) + \\
& + \int_0^t dt' \left[R^*(0, t') \beta_W(z, t - t') + W(0, t') (\gamma_W(z, t') + \delta(t - t')) \right]
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\alpha_W(z - z', t) = \kappa_W U_{WW}^{-1} e^{-\frac{t}{T}} - \kappa_R U_{WR}^{-1} e^{-\frac{t}{T}} I_0(2\sqrt{t g_1 (z - z')})$$

$$\beta_W(z, t - t') = U_{WR}^{-1} U_{RR} e^{-\frac{t-t'}{T}} \sqrt{\frac{g_1 z}{t - t'}} I_1(2\sqrt{(t - t') g_1 z})$$

$$\gamma_W(z, t - t') = U_{WR}^{-1} U_{RW} e^{-\frac{t-t'}{T}} \sqrt{\frac{g_1 z}{t - t'}} I_1(2\sqrt{(t - t') g_1 z}).$$

2.2.4. Uśrednione wzbudzenia

W realnej sytuacji informacja o rozkładzie wzbudzeń atomowych w funkcji odstrojenia jest zbędna, ponieważ nie jesteśmy w stanie mierzyć tej wielkości bezpośrednio. Oprócz tego, pod wpływem oddziaływania (zderzeń) prędkości atomów zmieniają się. Gaz się termalizuje — jego rozkład prędkości dąży do rozkładu Maxwella. To co mierzymy, to średnie wzbudzenie atomowe. Oznaczmy $B(z, 0, \Delta) = B(z, 0)$, ponieważ funkcja ta nie jest zależna od odstrojenia (zakładamy rozkład Maxwella). Równania (2.6) były rozwiązywane przy założeniu ustalonego odstrojenia. Dlatego ostatnim krokiem będzie uśrednienie równania (2.16) po odstrojeniach. Aby uprościć zapis definiujemy następujące wielkości

$$\begin{aligned} a_{BB} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) (c_R(\Delta) U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WW}^{-1}) \kappa_W \\ b_{BB} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) (c_R(\Delta) U_{RR}^{-1} + c_W^*(\Delta) U_{WR}^{-1}) \kappa_R \\ a_{BR} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) (c_R(\Delta) \kappa_W U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) \kappa_R U_{WR}^{-1}) U_{RR} \\ b_{BR} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) c_R(\Delta) \\ a_{BW} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) (c_R(\Delta) \kappa_W U_{RW}^{-1} + c_W^*(\Delta) \kappa_R U_{WR}^{-1}) U_{RW} \\ b_{BW} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) c_W^*(\Delta). \end{aligned}$$

Najschludniej można zapisać interakcję za pomocą związków IN-OUT

$$\begin{pmatrix} B(z, t) \\ R^*(z, t) \\ W(z, t) \end{pmatrix} = \int_0^t dt' \int_0^z dz' \begin{pmatrix} g_{BB} & g_{BR} & g_{BW} \\ g_{RB} & g_{RR} & g_{RW} \\ g_{WB} & g_{WR} & g_{WW} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B(z', t') \\ R^*(z', t') \\ W(z', t') \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

gdzie współczynniki macierzy zależą od zmiennych t, t', z, z' oraz parametrów wyznaczonych numerycznie: κ_W, κ_R oraz T .

$$\begin{aligned} g_{BB} &= \left(a_{BB} t e^{-\frac{t}{T}} - b_{BB} \mathcal{F}_3(t, z - z') + e^{-\frac{t}{T}} \delta(z - z') \right) \delta(t') \\ g_{BR} &= \left(a_{BR} e^{-\frac{t'}{T}} (I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) - 1) + b_{BR} e^{-\frac{t-t'}{T}} \right) \delta(z') \\ g_{BW} &= \left(a_{BW} e^{-\frac{t'}{T}} (I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) - 1) + b_{BW} e^{-\frac{t-t'}{T}} \right) \delta(z') \\ g_{RB} &= \left(\kappa_W U_{RW}^{-1} e^{-\frac{t-t'}{T}} - \kappa_R U_{RR}^{-1} \mathcal{F}_2(t - t', z - z') \right) \delta(t') \\ g_{RR} &= U_{RR}^{-1} U_{RR} \mathcal{F}_1(t - t', z - z') \delta(z') + \delta(t - t') \delta(z') \\ g_{RW} &= U_{RR}^{-1} U_{RW} \mathcal{F}_1(t - t', z - z') \delta(z') \\ g_{WB} &= \left(\kappa_W U_{WW}^{-1} e^{-\frac{t-t'}{T}} - \kappa_R U_{WR}^{-1} \mathcal{F}_2(t - t', z - z') \right) \delta(t') \\ g_{WR} &= U_{WR}^{-1} U_{RR} \mathcal{F}_1(t - t', z - z') \delta(z') \\ g_{WW} &= U_{WR}^{-1} U_{RW} \mathcal{F}_1(t - t', z - z') \delta(z') + \delta(t - t') \delta(z') \end{aligned}$$

Wiedząc, że modyfikowane funkcje Bessela w pobliżu zera można przybliżyć jako

$$I_0 \approx 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}$$

oraz

$$I_1(x) \approx \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16}$$

można łatwo sprawdzić, że macierz z równania (2.20) w granicy parametru g_1 , opisującym oddziaływanie (sprzężenie pola optycznego z polem wzbudzeń), dążącego do zera ma postać diagonalną

$$\begin{pmatrix} g_{BB} & g_{BR} & g_{BW} \\ g_{RB} & g_{RR} & g_{RW} \\ g_{WB} & g_{WR} & g_{WW} \end{pmatrix} \xrightarrow{g_1 \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \delta(z - z')\delta(t') & 0 & 0 \\ 0 & \delta(t - t')\delta(z') & 0 \\ 0 & 0 & \delta(t - t')\delta(z') \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że gdy nie ma oddziaływania, pola ewoluują niezależnie.

2.3. Stosowalność

Zbadana została stosowalność wzorów (2.20) wyprowadzonych w tym rozdziale, aby lepiej zrozumieć zasadność poczynionych przybliżeń. Przyjmując ustalone odstrojenie można wyznaczyć analitycznie postać macierzy przejścia $\hat{U}$ oraz macierzy doń odwrotnej:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} c_R & c_W^* \\ c_R & c_W^* \end{pmatrix} \quad (2.21a)$$

$$\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} c_{R'} & c_{R'} \\ c_W & c_W \end{pmatrix}. \quad (2.21b)$$

Aby określić ilościowo na ile takie przybliżenia mogą być zastosowane użyto następującej miary odległości dla macierzy

$$d = \left\| \hat{G}(\tau = 0) - \hat{U} \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \hat{U}^{-1} \right\|_2 \cdot \|\hat{G}(\tau = 0)\|_2^{-1},$$

gdzie 2-norma macierzy $\hat{A}$ jest zdefiniowana następująco

$$\|\hat{A}\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|\hat{A}x\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}}.$$

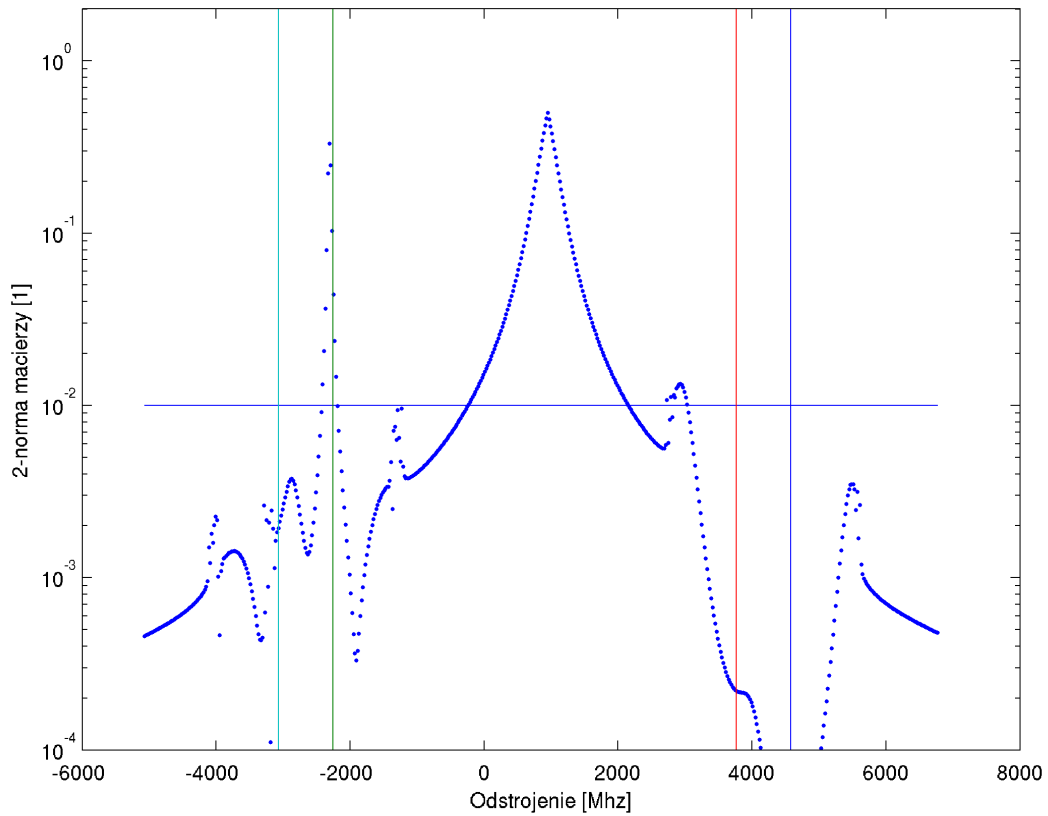
$\|x\|_2 = 1$ oznacza długość wektora x , a $\lambda_{\max}$ największą wartość własną macierzy $\hat{A}$. Dwunorma jest dobrą miarą, ponieważ mówi bardzo może zmienić dowolny wektor unormowany.

Zbadano jak się sprawuje przybliżenie macierzy $\hat{U}_N$ wyznaczonej numerycznie w porównaniu z odpowiednikiem wyznaczonym analitycznie dla ustalonej wartości odstrojenia i czasu $\tau = 0$. Drugim przybliżeniem, które należy sprawdzić to pominięcie mniejszej wartości własnej g_2 . Użycie wzorów (2.21) daje złe wyniki i nie powinno być używane. Z drugiej strony negatywny wynik świadczy o tym, że uwzględnienie efektu Dopplera jest ważne w opisie rozpraszania Ramana i uśrednianie nie może być zastąpione użyciem konkretnej wartości odstrojenia. Komplikacja modelu zawierająca ruch atomów jest zatem jak najbardziej uzasadniona.

Wiedząc, że należy użyć macierzy $\hat{U}_N$ można sprawdzić jak na dokładność ma wpływ zaniebdania mniejszej wartości własnej. Jest to pokazane na rys. 2.9, na którym zaznaczono także arbitralny próg 10^{-2} , poniżej którego możemy powiedzieć, że przybliżenie jest dostatecznie dobre. Na danym wykresie można odczytać, że przybliżenie powinno działać dobrze dla odstrojeń większych od 3030 MHz oraz mniejszych od -240 MHz, z wyłączeniem obu rezonansów (ponieważ rozważamy nierezonansowe rozpraszanie Ramana).

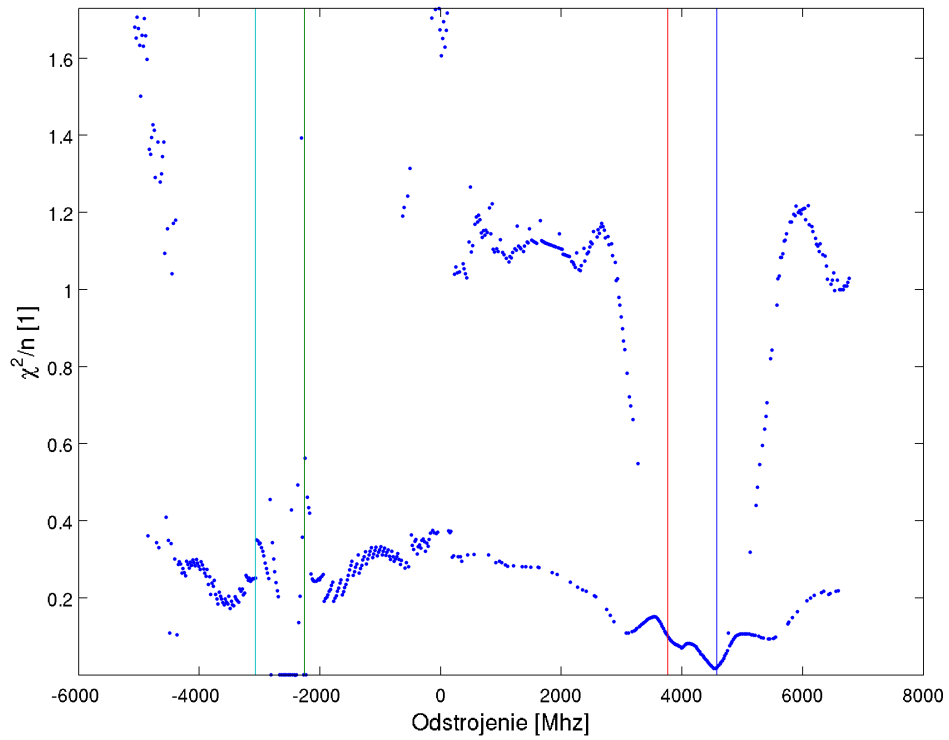
2.3.1. Zanik dwuwykładniczy

Przeglądając się uważnie krzywymi na rysunkach 2.4 oraz 2.5 można dojść do wniosku, że mają one wyraźnie charakter nieliniowy, zwłaszcza na początku. Można z tego względu próbować

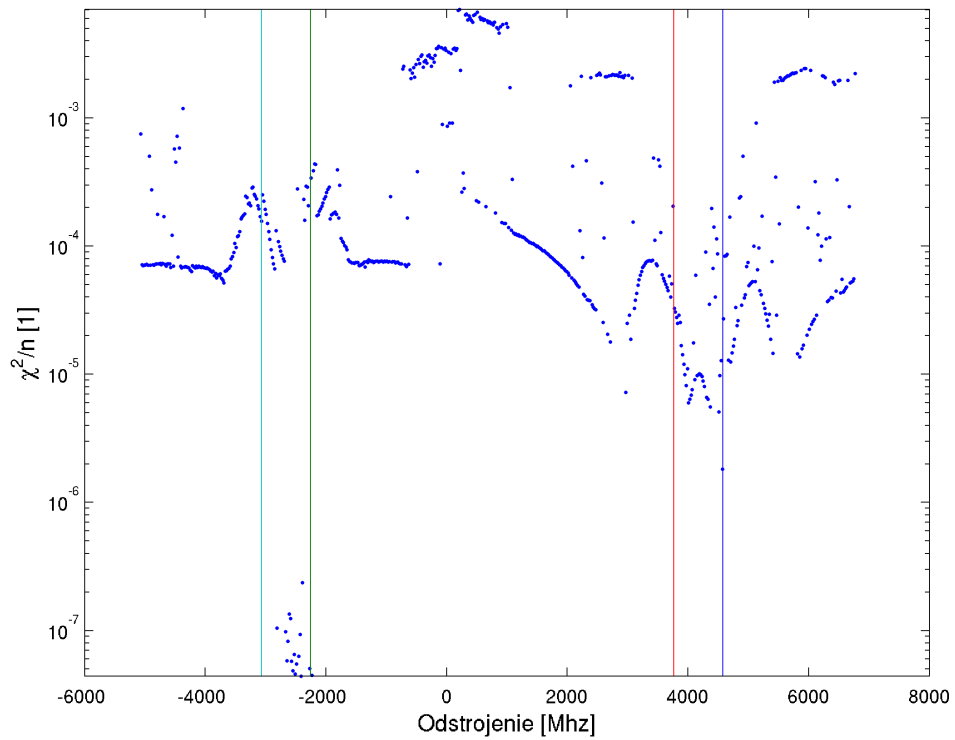


Rysunek 2.9: Wykres przedstawia wartość dwunormy d w funkcji odstrojenia Δ dla dokładnej (wyznaczonej numerycznie) macierzy $\hat{U}_N$ z pominięciem mniejszej wartości własnej. Ciągłą linią zaznaczono poziom, poniżej którego przybliżenie działa bardzo dobrze. W pewnych zakresach (odstrojenia dalekie od rezonansu i daleko od środka linii między poziomami) założenie to jest spełnione.

przybliżyć je za pomocą zaniku dwuwykładniczego. Na rysunkach 2.10 oraz 2.11 przedstawiono współczynnik χ^2 dzielony przez liczbę punktów krzywej dla dopasowania do krzywych 2.4 oraz 2.5 funkcji odpowiednio eksponencjalnej oraz bieksponencjalnej. Ta druga jest dużo lepszym modelem, jednak rozwiązanie równań ewolucji (2.7) byłoby dużo bardziej skomplikowane. Możemy wyciągnąć wniosek, że w interesującym nas zakresie parametrów funkcja eksponent wystarczająco dobrze opisuje zanik amplitudy propagatora.



Rysunek 2.10: Wykres przedstawia współczynnik χ^2 dzielony przez liczbę punktów wykresu dla dopasowania funkcji eksponencjalnej do rysunku propagatora $\hat{G}_0$ w funkcji odstrojenia.



Rysunek 2.11: Wykres przedstawia współczynnik χ^2 dzielony przez liczbę punktów wykresu dla dopasowania funkcji bieksponencjalnej do rysunku propagatora $\hat{G}_0$ w funkcji odstrojenia.

Rozdział 3

Zderzenia

Komórka rubidu zawiera gaz buforowy (krypton) pod ciśnieniem 1 tora oraz atomy rubidu w postaci ciała stałego osadzonego na ściankach. Podgrzewając komórkę powodujemy sublimację rubidu i zwiększenie jego koncentracji w układzie. Za pomocą temperatury można łatwo sterować ciśnieniem par, które ma wartość około 10^{-3} tora, więc jest kilka rzędów wielkości mniejsze od ciśnienia kryptonu. Gaz buforowy zmniejsza prędkość dyfuzji atomów rubidu, dzięki czemu zwiększa czas życia koherencji w danym miejscu komórki. Gaz w komórcie pozostawionej przez pewien czas bez oddziaływania dojdzie do stanu równowagi i rozkład prędkości atomów będzie termiczny. Badany układ nie jest stanem równowagowym, ponieważ światło wiązki laserowej oddziałuje w różnym stopniu z atomami o innych prędkościach, więc zaburza rozkład Maxwella. Efekty związane z podgrzewaniem gazu poprzez oddziaływanie z laserem można zaniedbać. Zmiany pędu nie mogą zostać zaniedbane, ponieważ są ściśle związane ze zmianą odstrojenia atomów od światła laserowego, więc wpływają na dynamikę procesu.

Efekty zderzeniowe pozwalają na powrót rozkładu do stanu termicznego.

Krypton jest używany jako gaz buforowy dzięki temu, że zapełnione powłoki elektronowe gwarantują bardzo małą reaktywność. Ostatni rodzaj zderzeń, które mogą zaburzać układ, są zderzeniami ze szklanymi ściankami komórki. Atomy szkła mogą posiadać spin, którego oddziaływanie ze wzbudzeniami może powodować dodatkową dekoherencję. Praktycznym okazało się zastosowanie techniki pokrywania ścianek parafiną, która jest w stanie zwiększyć czas życia wzbudzeń o kilka rzędów wielkości [17].

W niniejszym rozdziale uwzględnimy zderzenia z gazem buforowym, które powodują termalizację układu.

3.1. Równanie Boltzmanna

Równanie Boltzmana służy do opisy układów nierównowagowych. Wersja równania możliwa do zastosowania do opisu nierównowagowego układu spinów, którą można znaleźć w pracy [30], ma postać:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(\Delta, t) = -\gamma_v \rho(\Delta, t) + \gamma_v \int W(\Delta, \Delta') \rho(\Delta', t) d\Delta' + P(\Delta, t),$$

gdzie γ_v jest współczynnikiem tłumienia, $P(\Delta, t)$ oznacza czynnik powodujący wzrost koherencji, a $W(\Delta, \Delta')$ jest jądrem zderzeniowym i opisuje prawdopodobieństwo, że cząstka o odstrojeniu Δ' po zderzeniu uzyska odstrojenie Δ . Z definicji prawdopodobieństwa zachodzi

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\Delta, \Delta') d\Delta = 1,$$

ponieważ cząstka która się odbije będzie miała skończoną prędkość rzeczywistą. Drugim warunkiem, który ta funkcja musi spełniać jest zachowanie rozkładu termicznego. Formalnie warunek

ten można zapisać jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\Delta, \Delta') f_M(\Delta) d\Delta = f_M(\Delta').$$

Istnieją różne modele rozkładu $W(\Delta, \Delta')$ [30, 31], które są powszechnie używane.

Po uwzględnianiu zderzeń równania układu dane wzorem (2.6) opisujące pola świetlne się nie zmieniają. Zmieni się jedynie trzecie równanie i będzie miało postać

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t}(z, t, \Delta) &= c_W^*(\Delta) W(z, t) + c_R(\Delta) R^*(z, t) + \\ &- s(\Delta) B(z, t, \Delta) + \gamma_v \int W(\Delta, \Delta') B(z, t, \Delta') d\Delta'. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ostatni człon uwzględnia zmianę koherencji z powodu zderzeń. Przy założeniu niezależnej od czasu pompy może być zapisany jako [30]

$$\frac{\partial B}{\partial t}(z, t, \Delta) = - \int \Gamma(\Delta, \Delta') B(z, t, \Delta) \Delta'.$$

Można zapisać Γ w postaci rozkładu na wartości własne

$$\Gamma(\Delta, \Delta') = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n v_n(\Delta) v_n^L(\Delta'),$$

przy czym $\gamma_0 = 0$. Współczynniki γ_n będą uważane za znane. Ich wartości można otrzymać w wyniku pomiarów. Funkcje v_n oraz v_n^L tworzą bazę i posiadają następujące własności

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\Delta) v_n^L(\Delta') &= \delta(\Delta - \Delta'), \\ \int_{-\infty}^{\infty} v_n^L(\Delta) v_m(\Delta) d\Delta &= \langle n | m \rangle = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Dokładne wzory na funkcje bazowe są wyrażone za pomocą wielomianów Hermite'a $H_n(\Delta)$

$$\begin{aligned} v_n(\Delta) &= \frac{H_n(\Delta)}{\sqrt{2^n n! \pi 2 \sigma_\Delta^2}} \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2 \sigma_\Delta^2}\right), \\ v_n^L(\Delta) &= \frac{H_n(\Delta)}{\sqrt{2^n n!}}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Warto podkreślić w tym miejscu asymetrię. O ile współczynnik przy wektorach jest rzeczywisty taki jak podany w równaniu (3.2), to współczynnik przy kowektorze jest przemnożony przez rozkład Gaussa. Dzięki temu jest to baza ortonormalna.

3.2. Mody Gaussów-Hermite'ów

Dotąd zderzenia nie były uwzględnione w opisie. Zaburzony wiązką laserową układ pozostawał w stanie nierównowagowym. Model był pozbawiony mechanizmów doprowadzających rozkład do rozkładu Maxwella. Ten ostatni jest funkcją Gaussa, więc opisywany jest wektorem o $n = 0$ w bazie Gaussów-Hermite'ów. Stąd rozkład pola wzbudzeń $B(z, t, \Delta)$ w tej bazie jest naturalny. Każdą funkcję $B(z, t, \Delta)$ można przedstawić postaci sumy wyrazów separowalnych względem odstrojenia

$$B(z, t, \Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z, t) v_n^L(\Delta),$$

gdzie $B_n(z, t)$ są współczynnikami rozkładu w bazie.

Można myśleć, o tym przedstawieniu jak o rozkładzie kowektora

$$B(z, t, \Delta) = \sum_0^{\infty} B_n(z, t) \langle n |. \quad (3.3)$$

Wstawiając zależność (3.3) do równania (3.1), a następnie działając wektorem $|m\rangle$ z prawej strony ¹ otrzymujemy wyrażenie na pochodną czasową m -tego współczynnika rozkładu prędkości

$$\begin{aligned} \dot{B}_m(z, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z, t) \langle n | s_{\Delta}(\Delta) | m \rangle - \gamma_m B_m(z, t) + \\ & + \langle 0 | c_R(\Delta) | m \rangle R^*(z, t) + \langle 0 | c_W^*(\Delta) | m \rangle W(z, t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2.1. Mod zerowy

Zajmijmy się tylko jednym, zerowym modem w równaniu (3.4). Będziemy to interpretować jako bardzo szybkie przechodzenie do stanu równowagi termicznej. Zależność będzie miała następującą postać

$$\begin{aligned} \dot{B}_0(z, t) = & -B_0(z, t) \langle 0 | s(\Delta) | 0 \rangle + \\ & + \langle 0 | c_R(\Delta) | 0 \rangle R^*(z, t) + \langle 0 | c_W^*(\Delta) | 0 \rangle W(z, t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dla przejrzystości wprowadzę oznaczenie

$$\langle 0 | X(\Delta) | 0 \rangle \stackrel{\text{ozn.}}{\equiv} \overline{X},$$

dla dowolnego symbolu X .

Używając powyższego oznaczenia i rozwiązując równanie (3.5) dostanę

$$B_0(z, t) = B_0(z, 0) e^{-\overline{s}t} + \int_0^t dt' e^{-(t-t')\overline{s}} (\overline{c}_R R^*(z, t') + (\overline{c}_W^* W(z, t')). \quad (3.6)$$

Wstawiając teraz otrzymany wynik (3.6) do równań (2.6) na pola świetlne otrzymujemy równanie

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} R^*(z, t) \\ W(z, t) \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} \overline{c}_{R'} \\ \overline{c}_W \end{pmatrix} B_0(z, 0) e^{-\overline{s}t} + \\ & + \int_0^t dt' e^{-(t-t')\overline{s}} \begin{pmatrix} \overline{c}_{R'} \overline{c}_R & \overline{c}_{R'} \overline{c}_W^* \\ \overline{c}_W \overline{c}_{R'} & |\overline{c}_W|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^*(z, t') \\ W(z, t') \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dla uzyskania spójności zapisu (przy braku zależności od odstrojenia Δ) wykorzystano fakt, że

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) \overline{c}_W(\Delta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta f_M(\Delta) \frac{H_0(\Delta)}{\sqrt{\pi}} \overline{c}_W H_0(\Delta) = \langle 0 | \overline{c}_W | 0 \rangle.$$

Równanie ewolucji jest ładząco podobne do równania (2.7), z tym, że nie ma tutaj zależności od odstrojenia i macierz propagatorów jest stała, więc nie trzeba uśredniać macierzy po odstrojeniach. Dzięki podobieństwu równań, mogę od razu podać związki IN-OUT:

$$\begin{pmatrix} B(z, t) \\ R^*(z, t) \\ W(z, t) \end{pmatrix} = \int_0^t dt' \int_0^z dz' \begin{pmatrix} \mathfrak{g}_{BB} & \mathfrak{g}_{BR} & \mathfrak{g}_{BW} \\ \mathfrak{g}_{RB} & \mathfrak{g}_{RR} & \mathfrak{g}_{RW} \\ \mathfrak{g}_{WB} & \mathfrak{g}_{WR} & \mathfrak{g}_{WW} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B(z', t') \\ R^*(z', t') \\ W(z', t') \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

gdzie współczynniki macierzy są dane za pomocą poniższych wyrażeń

¹Równoważenie, licząc przekrycie za pomocą całki przyłożonej obustronnie z $\int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \exp(-\Delta^2) H_m(\Delta)$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_{\text{BB}} &= \left(\mathfrak{a}_{\text{BB}} t e^{-t\bar{s}} - \mathfrak{b}_{\text{BB}} \mathcal{G}_3(t, z - z') + e^{-t\bar{s}} \delta(z - z') \right) \delta(t') \\
\mathfrak{g}_{\text{BR}} &= \left(\mathfrak{a}_{\text{BR}} e^{-t'\bar{s}} (I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) - 1) + \bar{c}_R e^{-(t-t')\bar{s}} \right) \delta(z') \\
\mathfrak{g}_{\text{BW}} &= \left(\mathfrak{a}_{\text{BW}} e^{-t'\bar{s}} (I_0(2\sqrt{g_1 t' z}) - 1) + \bar{c}_W e^{-(t-t')\bar{s}} \right) \delta(z') \\
\mathfrak{g}_{\text{RB}} &= \left(\mathfrak{a}_{\text{RB}} e^{-(t-t')\bar{s}} - \mathfrak{b}_{\text{RB}} \mathcal{G}_2(t - t', z - z') \right) \delta(t') \\
\mathfrak{g}_{\text{RR}} &= U_{\text{RR}}^{-1} U_{\text{RR}} \mathcal{G}_1(t - t', z - z') \delta(z') + \delta(t - t') \delta(z') \\
\mathfrak{g}_{\text{RW}} &= U_{\text{RR}}^{-1} U_{\text{RW}} \mathcal{G}_1(t - t', z - z') \delta(z') \\
\mathfrak{g}_{\text{WB}} &= \left(\mathfrak{a}_{\text{WB}} e^{-(t-t')\bar{s}} - \mathfrak{b}_{\text{WB}} \mathcal{G}_2(t - t', z - z') \right) \delta(t') \\
\mathfrak{g}_{\text{WR}} &= U_{\text{WR}}^{-1} U_{\text{RR}} \mathcal{G}_1(t - t', z - z') \delta(z') \\
\mathfrak{g}_{\text{WW}} &= U_{\text{WR}}^{-1} U_{\text{RW}} \mathcal{G}_1(t - t', z - z') \delta(z') + \delta(t - t') \delta(z')
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{a}_{\text{BB}} = (\bar{c}_R U_{\text{RW}}^{-1} + \bar{c}_W^* U_{\text{WW}}^{-1}) (U_{\text{WR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{WW}} \bar{c}_W)$$

$$\mathfrak{b}_{\text{BB}} = (\bar{c}_R U_{\text{RR}}^{-1} + \bar{c}_W^* U_{\text{WR}}^{-1}) (U_{\text{RR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{RW}} \bar{c}_W)$$

$$\mathfrak{a}_{\text{BR}} = (\bar{c}_R (U_{\text{WR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{WW}} \bar{c}_W) U_{\text{RW}}^{-1} + \bar{c}_W^* (U_{\text{RR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{RW}} \bar{c}_W) U_{\text{WR}}^{-1}) U_{\text{RR}}$$

$$\mathfrak{a}_{\text{BW}} = (\bar{c}_R (U_{\text{WR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{WW}} \bar{c}_W) U_{\text{RW}}^{-1} + \bar{c}_W^* (U_{\text{RR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{RW}} \bar{c}_W) U_{\text{WR}}^{-1}) U_{\text{RW}}$$

$$\mathfrak{a}_{\text{RB}} = (U_{\text{WR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{WW}} \bar{c}_W) U_{\text{RW}}^{-1}$$

$$\mathfrak{b}_{\text{RB}} = (U_{\text{RR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{RW}} \bar{c}_W) U_{\text{RR}}^{-1}$$

$$\mathfrak{a}_{\text{WB}} = (U_{\text{WR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{WW}} \bar{c}_W) U_{\text{WW}}^{-1}$$

$$\mathfrak{b}_{\text{WB}} = (U_{\text{RR}} \bar{c}_{R'} + U_{\text{RW}} \bar{c}_W) U_{\text{WR}}^{-1}.$$

Funkcje $\mathcal{G}_i$ zostały zdefiniowane na podobieństwo funkcji $\mathcal{F}_i$ z rozdziału 2

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(t, z) &= e^{-t\bar{s}} \sqrt{\frac{g_1 z}{t}} I_1(2\sqrt{t g_1 z}) \\
\mathcal{G}_2(t, z) &= e^{-t\bar{s}} I_0(2\sqrt{t g_1 z}) \\
\mathcal{G}_3(t, z) &= e^{-t\bar{s}} \left(\sqrt{\frac{t}{g_1 z}} I_1(2\sqrt{t g_1 z}) \right).
\end{aligned}$$

Warunkiem stosowalności powyższych relacji jest to, aby czas termalizacji był dużo większy niż średni czas oddziaływania atomu z polem.

Rozdział 4

Kwantowanie

Równanie (2.20) opisuje zależności funkcyjne. Przejście do opisu operatorowego formalnie polega na zamianie funkcji na operatory. Kwantowanie pól elektromagnetycznych sprawia najmniej problemów koncepcyjnych, ponieważ jest to problem bardzo dobrze poznany [32]. Pozostaje wyjaśnić jak rozumieć operator wzbudzeń $\hat{b}$.

„Klasyczne” pole atomowe. Klasyczność polega na tym, że atomy w różnych miejscach $B(z)$ są niezależne, nie czują swojej obecności, nie przejawiają korelacji kwantowych. Założenie o traktowaniu atomu jako układu dwupoziomowego należy przypomnieć, bo jest ono kluczowe. System dwupoziomowy (czyli opisujący cząstkę o spinie $\frac{1}{2}$) ma tę własność, że podziałanie nań drugi raz operatorem kreacji daje zero. Atomy rubidu w komórce mogą być wzbudzone tylko jednokrotnie. Niezależnie od skomplikowanej struktury przybliżenie dwupoziomowe jest spełnione w rzeczywistości. Natężenia stokesowskie oraz antystokesowskie, które rejestrujemy są na tyle duże, że mogą być opisywane za pomocą stanów koherentnych. W trakcie pomiaru fotonów stokesowskich, także wzbudzenia atomowe (z którymi są one skorelowane) muszą być rzutowane na stany koherentne, które opisują stany klasyczne. Jest to kolejny argument na to, aby opisywać wzbudzenia klasyczną funkcją B .

„Klasycznie” opisywaliśmy superpozycję stanu $|\phi\rangle$ w punkcie (z, t) wprowadzając pewną funkcję $B(z, t)$

$$|\phi\rangle = |0\rangle + B(z, t) |1\rangle,$$

która miała tę własność, że

$$\forall_z \forall_t |B(z, t)|^2 \ll 1.$$

Interpretację tej funkcji można łatwo podać badając postać macierzy gęstości atomów tego stanu

$$\rho = |\phi\rangle \langle\phi| = \begin{pmatrix} 1 & B(z, t)^* \\ B(z, t) & |B(z, t)|^2 \end{pmatrix}.$$

Z powyższego obiektu możemy odczytać, że pole $B(z, t)$ opisuje koherencję, $|B(z, t)|^2$ — populację wzbudzeń atomowych. Dzięki przyjętemu założeniu zachodzi

$$\text{Tr } \rho = 1 + |B(z, t)|^2 \approx 1.$$

Opis N atomów w „plastrze” komórki realizujemy za pomocą iloczynu tensorowego, traktując atomy niezależnie

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^N \left(|0\rangle_i + B(z, t) |1\rangle_i \right)$$

Chcąc wprowadzić pełen opis kwantowy dla całej komórki postulujemy operator kreacji w następującej postaci

$$\hat{B}^\dagger(z, t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |1\rangle_i \langle 0| \delta(r_{\text{at}} - z) \delta(t)$$

gdzie r_{at} jest położeniem atomu, a z położeniem wzdłuż komórki. Operator działa więc tylko na atomy z pewnego „plastra” wzdłuż komórki. W ogólnym przypadku liczba N może być także zależna od położenia, choć dla ułatwienia możemy przyjąć, że będzie stała. Jest to poprawne założenie ze względu na jednorodne rozłożenie atomów w komórce. Powyższy wzór możemy także zapisać w języku drugiej kwantyzacji w sposób następujący

$$\hat{B}^\dagger(z, t) = |N-1, 1\rangle \langle N, 0| \delta(r_{\text{at}} - z) \delta(t).$$

Należy pamiętać tutaj, że operator $\hat{B}^\dagger(z, t)$ jest stosowany do zbioru N atomów w punkcie z i operatory dla różnych współrzędnych przestrzennych komutują ze sobą.

Chcemy żeby komutator był równy $\delta(z - z')\delta(t - t')$, tak aby zależność operatorów z jednej strony nie była trywialna (zero), a z drugiej nie jest bardzo skomplikowana. W tym celu musi być spełnione

$$\begin{aligned} \langle \psi | [\hat{B}(z, t), \hat{B}^\dagger(z', t')] | \psi \rangle &= \langle \psi | \left(\hat{B}(z, t) \hat{B}^\dagger(z', t') - \hat{B}^\dagger(z', t') \hat{B}(z, t) \right) | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | \frac{|N, 0\rangle \langle N, 0| - |N-1, 1\rangle \langle N-1, 1|}{N} | \psi \rangle \delta(z - z') \delta(t - t') \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \delta(z - z') \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pamiętając, że stany, z którymi mamy do czynienia są w znakomitej większości postaci $|\psi\rangle = |N, 0\rangle$, możemy zaobserwować, że N musi być duże, aby związek komutacyjny był spełniony w każdym miejscu komórki. Dodatkowo duża ilość cząstek sprawia, że prawdopodobieństwo wzbudzenia (działania nań operatorem $\hat{B}^\dagger$) konkretnej cząstki jest niewielkie, a szansa na dwukrotne wzbudzenie znikoma — rzędu $1 : N^2$. Mimo opisu bozonowego (dowolna ilość wzbudzeń) w praktyce mamy tylko jedno wzbudzenie — tak jak w przypadku układu dwupoziomowego. Jeżeli zależność komutacyjna ma być spełniona dla dowolnego położenia „plasterka” w komórce z parami rubidu, to znaczy że gęstość par musi być duża.

Treść powyższej agitacji jest zawarta w transformacji Holsteina-Primakoffa [33], która przy odpowiednich założeniach (dotyczących niewielkiej ilości wzbudzeń) zamienia zależność operatorów momentu pędu na zależność bozonową, która prowadzi do dużo prostszych rachunków niż ta pierwsza. Reżim, w którym pracujemy uzasadnia powyższą transformację.

Na sytuację można spojrzeć też w inny sposób. Opis matematyczny stanu dwupoziomowego jest niezależny czy jest to spin elektronu czy wzbudzenie atomowe w komórce. Analogicznie do całkowitego momentu pędu stosowanego w fizyce atomowej można dla komórki pamięci kwantowej wprowadzić całkowite wzbudzenie atomowe, które ma wszystkie własności matematyczne z momentem pędu (łącznie z relacjami komutacyjnymi czy analogiem liczby kwantowej m — rzutu momentu pędu na ustaloną oś).

Traktując stan $|N, 0\rangle$ jako próżnię dla pewnego operatora kreacji $\hat{a}^\dagger$, który wprowadzę i pamiętając, że wzbudzeń atomowych jest niewiele w porównaniu liczbą atomów w danym fragmencie przestrzeni, co formalnie daje następujący warunek

$$\langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle = n \ll N,$$

mogę wprowadzić [33] zależności, które przybliżają się do

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ &= \hbar \sqrt{2N} \sqrt{1 - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N}} \hat{a} \approx \hbar \sqrt{2N} \hat{a} \\ \hat{S}_- &= \hbar \sqrt{2N} \hat{a}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{a}^\dagger \hat{a}}{2N}} \approx \hbar \sqrt{2N} \hat{a}^\dagger \\ \hat{S}_z &= \hbar (N - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \approx \hbar N = \text{const.} \end{aligned}$$

W tym miejscu bezpośrednio widać, że relacja komutacyjna upraszcza się

$$[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hbar\hat{S}_z \longrightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$

Teraz doskonale widać, że wzbudzenia w komórce pamięci mają charakter bozonowy. Jest to o tyle pożądane, że z jednej strony opis jest łatwiejszy niż przy użyciu operatorów momentu pędu, a z drugiej strony komutator nie znika, więc jest nadzieja na znalezienie efektów kwantowych w całym procesie.

Zarówno pole elektromagnetyczne jak i pole wzbudzeń atomowych jest opisywane statystyką Bosego-Einsteina. Operatory spełniają zatem związki komutacyjne:

$$[\hat{B}(z, t), \hat{B}^\dagger(z', t')] = [\hat{r}(z, t), \hat{r}^\dagger(z', t')] = [\hat{w}(z, t), \hat{w}^\dagger(z', t')] = \delta(z - z')\delta(t - t'),$$

natomiast pozostałe komutatory wynoszą zero.

Znając te relacje, mogą zapisać równanie operatorowe na ewolucję pól

$$\begin{pmatrix} \hat{b}(z, t) \\ \hat{r}^\dagger(z, t) \\ \hat{w}(z, t) \end{pmatrix} = \int_0^t dt' \int_0^z dz' \begin{pmatrix} g_{BB} & g_{BR} & g_{BW} \\ g_{RB} & g_{RR} & g_{RW} \\ g_{WB} & g_{WR} & g_{WW} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{b}(z', t') \\ \hat{r}^\dagger(z', t') \\ \hat{w}(z', t') \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

gdzie elementy macierzy postaci g_{XY} dla $X, Y \in \{R, W, B\}$ są funkcjami t, t', z, z' .

4.1. Wartości oczekiwane na stanie próżni

Korzystając z informacji dotyczących bozonowej natury wzbudzeń pól można wyznaczyć średnie wartości wzbudzeń na stanie próżni fotonowej. Średnią wartość wzbudzeń przyjmę za

$$\langle \hat{b}^\dagger(z, 0) \hat{b}(z', 0) \rangle = n_0 \delta\left(\frac{z - z'}{L}\right),$$

gdzie L jest długością komórki z parami gazu.

4.1.1. Bez termalizacji

W przypadku wartości próżniowych dla równania (2.20), uwzględniającego efekt Dopplera bez zderzeń otrzymamy następujące wyniki

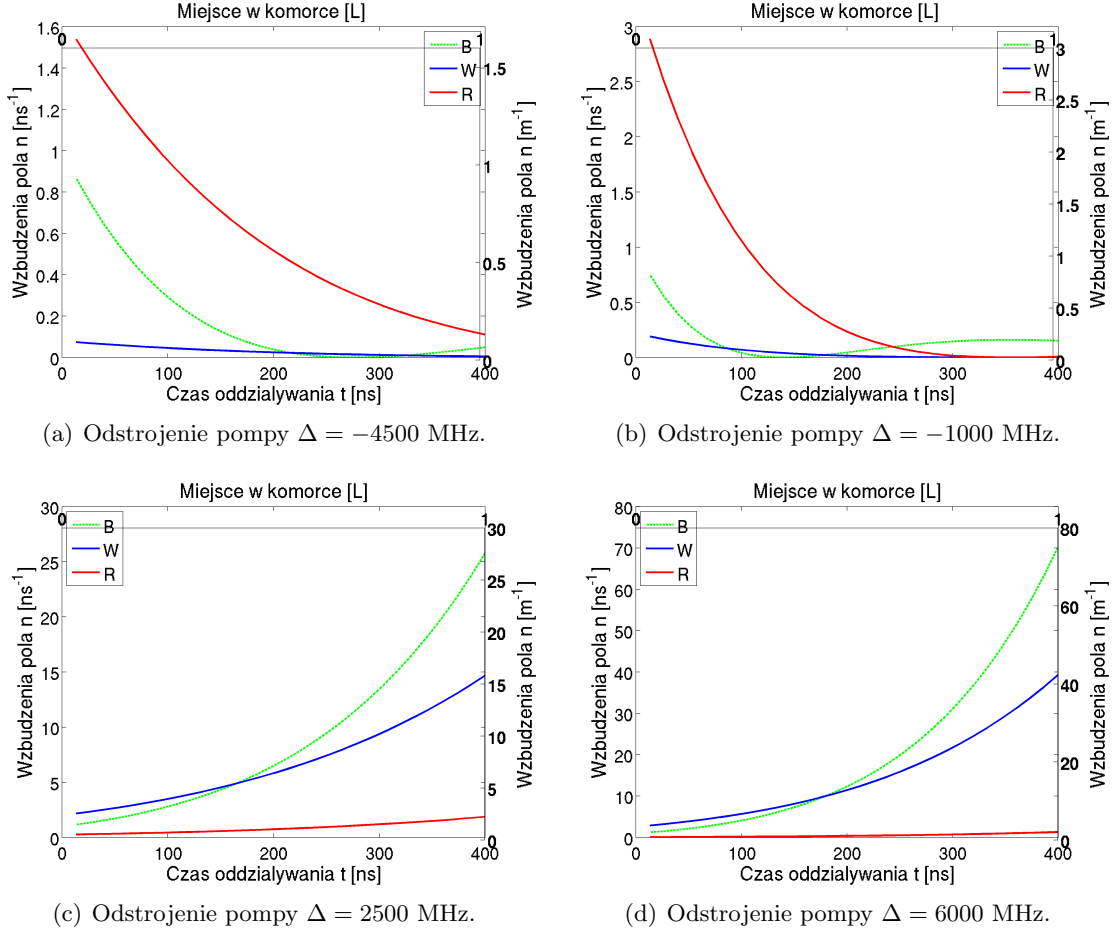
$$\begin{aligned} \langle \hat{b}^\dagger(z, t) \hat{b}(z, t) \rangle &= \int_0^t dt' \int_0^z dz' \left| g_{BR} \right|^2 + n_0 \int_0^t dt' \int_0^z dz' \left| g_{BB} \right|^2, \\ \langle \hat{w}^\dagger(z, t) \hat{w}(z, t) \rangle &= \int_0^t dt' \int_0^z dz' \left| g_{WR} \right|^2 + n_0 \int_0^t dt' \int_0^z dz' \left| g_{WB} \right|^2, \\ \langle \hat{r}^\dagger(z, t) \hat{r}(z, t) \rangle &= \int_0^t dt' \int_0^z dz' \left| g_{RW} \right|^2 + (1 + n_0) \int_0^t dt' \int_0^z dz' \left| g_{RB} \right|^2. \end{aligned}$$

4.1.2. Natychmiastowa termalizacja

Jedyną różnicą pomiędzy równaniem bez termalizacji, a z termalizacją jest różnica w postaci macierzy propagatorów. Aby wyznaczyć wartości próżniowe zostanie użyte równanie (3.8). Wyniki są identyczne jak dla przypadku bez termalizacji, z tym, że zamiast całkowania funkcji g_{XY} należy użyć odpowiednich funkcji $\mathbf{g}_{XY}$.

4.1.3. Wzbudzenia w zależności od odstrojenia pompy

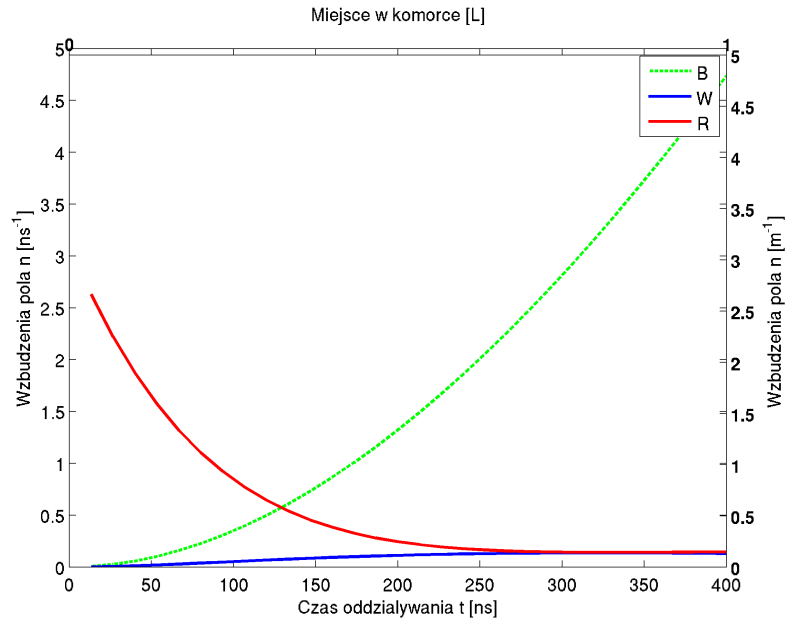
Zależność wzbudzeń od odstrojenia pompy Δ można zobaczyć na rys. 4.1. Przedstawiony na nich wkład pochodzi od obecności wzbudzenia w komórce, w obecności zderzeń. Zgodnie z intuicją dla odstrojeń ujemnych (oznaczających częstotliwości bliższe odczytowi) prawdopodobieństwo wygenerowania fotonu antystokesowskiego jest większe niż wygenerowania fotonu stokesowskiego (czerwona krzywa ponad niebieską). Dla odstrojeń dodatnich sytuacja jest dokładnie odwrotna. Dodatkowo można zwrócić uwagę, że dla odczytu liczba wzbudzeń maleje, natomiast dla zapisu — rośnie.



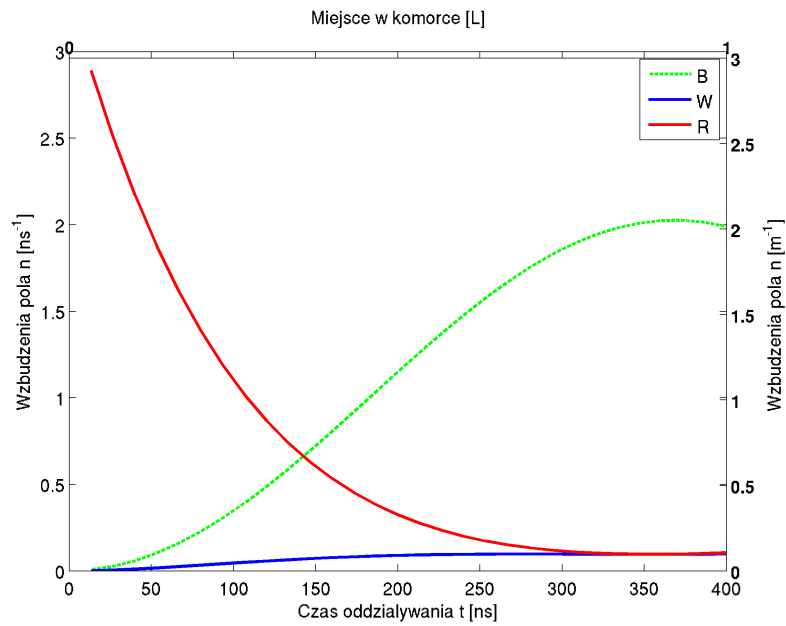
Rysunek 4.1: Wykresy przedstawiają wzbudzenia atomowe oraz pól fotonowych na stanie próżni dla charakterystycznych odstrojeń. Wartości odstrojeń są podane przy odpowiednich wykresach. Model uwzględnia termalizację (zderzenia), wykreślony jest wkład pochodzący od pojedynczego wzbudzenia w komórce. Pola optyczne są wyznaczone w funkcji czasu, natomiast pole wzbudzeń w funkcji położenia w komórce.

4.1.4. Porównanie modelu bez termalizacji i z termalizacją

Dołączenie do modelu termalizacji, tak jak przedstawiono na rysunkach 4.2, objawia się zmniejszeniem intensywności wzbudzeń w układzie. Dotyczy to wszelkich wzbudzeń, bez względu na odstrojenie.



(a) Brak zderzeń.

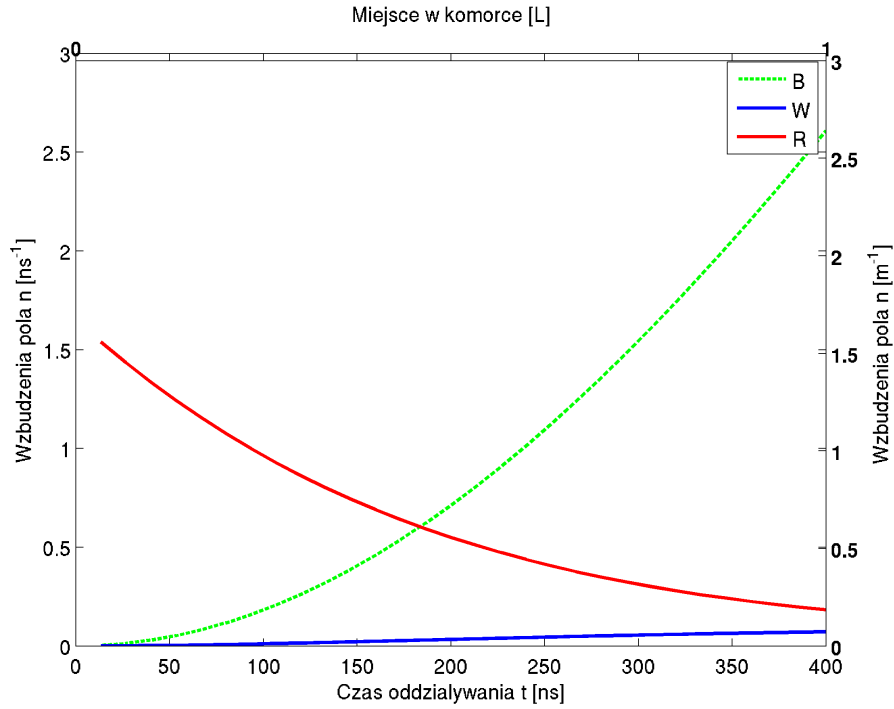


(b) Termalizacja (zderzenia są obecne).

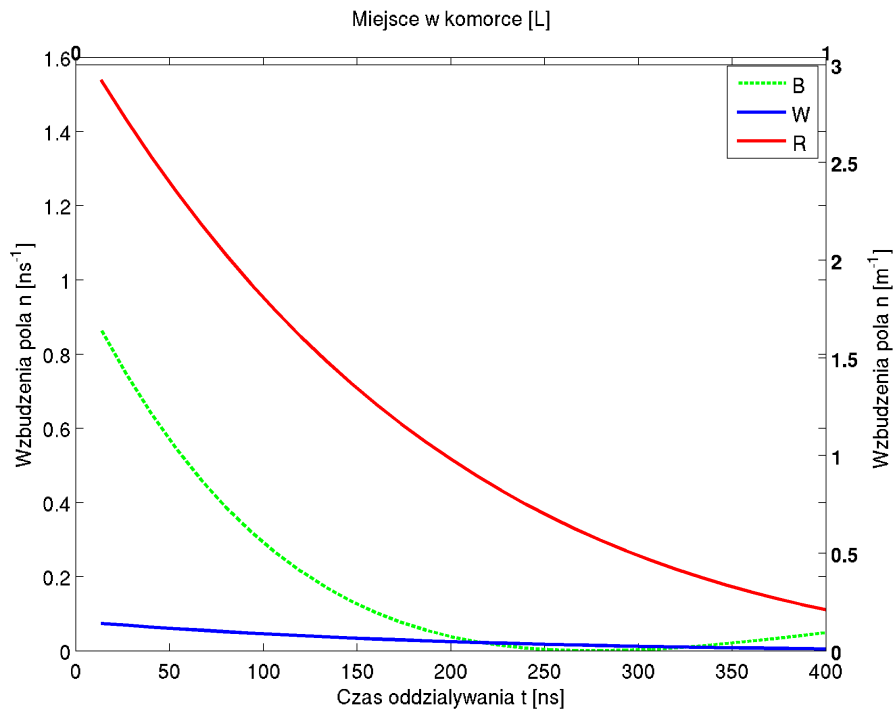
Rysunek 4.2: Wykresy przedstawiają wzbudzenia atomowe (wkład pochodzący od wzbudzenia w komórce) oraz pola fotonowe na stanie próżni elektromagnetycznej dla dwóch modeli. Jeden zawiera zderzenia z gazem buforowym, natomiast drugi nie. Wynik uzyskano dla odstrojenia $\Delta = -1000$ MHz. Pola optyczne są wyznaczone w funkcji czasu, natomiast pole wzbudzeń w funkcji położenia w komórce.

4.1.5. Wkłady od emisji spontanicznej i wymuszonej

Analizując wkłady od poszczególnych emisji na rys. 4.3, można zauważyć, że emisja spontaniczna odpowiada za generowanie wzbudzeń.



(a) Wkład od emisji spontanicznej (brak wzbudzenia w komórce).



(b) Wkład od emisji wymuszonej (pojedyncze wzbudzenie w komórce).

Rysunek 4.3: Wykresy przedstawiają wzbudzenia atomowe oraz pól fotonowych na stanie próżni — wkłady dla emisji spontanicznej oraz wymuszonej (przy odstrojeniu $\Delta = -4500$). Model uwzględnia termalizację (zderzenia), wykreślony jest wkład pochodzący od pojedynczego wzbudzenia w komórce. Pola optyczne są wyznaczone w funkcji czasu, natomiast pole wzbudzeń w funkcji położenia w komórce.

Rozdział 5

Podsumowanie

Podczas pracy badawczej, aby opisać pamięć kwantową opartą na ropraszaniu Ramana, wprowadziłem półklasyczny opis atomu w postaci trójpoziomowego układu lambda (rys. 1.3). Następnie uwzględniłem złożoną strukturę energetyczną atomów alkalicznych (rys. 1.1), sumując wkłady od wielu przejść oraz stosując przybliżenie adiabatyczne, dostając efektywnie opis dwuatomowy. Otrzymane równania (1.22) oraz (1.23) pozwalają opisać ewolucję pól stokesowskich, antystokesowskich oraz atomowych.

Korzystając z uzyskanych wyników, wyprowadziłem równania ewolucji pól elektromagnetycznych oraz wzbudzeń przy uwzględnieniu poszerzenia Dopplera. Wyznażyłem postać propagatora, który opisuje prawdopodobieństwo wzbudzeń w funkcji czasu i odległości w komórce. W stosunkowo szerokim zakresie nas interesującym można założyć postać wykładniczą propagatora. Rozwiązane równania mają postać (2.20).

W rozdziale trzecim uwzględniłem po raz pierwszy w pracy obecność zderzeń z gazem buforowym, który powoduje termalizację układu. Rozwiązując równanie (3.1) w przybliżeniu zerowego modu otrzymujemy (3.8). Jego postać jest podobna w przypadku, gdy nie interesuje nas termalizacja, jednak oba rozwiązania różnią się współczynnikami.

W rozdziale czwartym od opisu półklasycznego przeszedłem do opisu kwantowego. W przypadku małej ilości wzbudzeń mogę dokonać przybliżenia Holsteina-Primokoffa, dzięki czemu wszystkie trzy pola mogę traktować jak bozony. Równanie (4.2) przedstawia operatorową postać wyprowadzonych wcześniej równań. Na podstawie kwantowej wersji równań policzyłem wartości średnie pól na stanie próżni fotonowej.

Z powodu prowadzenia wielu eksperymentów nad pamięciami kwantowymi tego typu wynik, oprócz znaczenia teoretycznego, może mieć też zastosowanie praktyczne. Uzyskane wyniki zgadzają się jakościowo z zachowaniem układu. Dalsze badania tematyki można rozwijać w zakresie rezygnacji z przybliżenia jednej wartości własnej w równaniu (2.8), a także dodania kolejnych (poza zerowym) modów w opisie termalizacji. Potencjalne kierunki rozwoju to zwiększenie w opisie wymiaru przestrzennego, aby móc kontrolować przestrzenny rozkład wzbudzeń.

Dodatek A

Dipolowy moment przejścia

W niniejszym dodatku rozpatrzę wielkości, które pojawiają się w sekcji 1.3.2.

Sumy iloczynów dipolowych postaci

$$\sum_e \frac{(\vec{A}_1^* \cdot \vec{d}_{eg}^*)(\vec{A}_2 \cdot \vec{d}_{eh})}{2(\Gamma - 2i\Delta_e)\hbar^2} = \vec{A}_1^* \cdot \left(\sum_e \frac{\vec{d}_{ge} \cdot \vec{d}_{eh}}{2(\Gamma - 2i\Delta_e)\hbar^2} \right) \cdot \vec{A}_2 = \vec{A}_1^* \cdot \left(\sum_e \frac{\mathcal{D}_e}{2(\Gamma - 2i\Delta_e)\hbar^2} \right) \cdot \vec{A}_2 \quad (\text{A.1})$$

można zapisać używając tensora podatności

$$\mathcal{D}_e = \begin{pmatrix} d_{ge,x} \\ d_{ge,y} \\ d_{ge,z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{eh,x} & d_{eh,y} & d_{eh,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{ge,x}d_{eh,x} & d_{ge,x}d_{eh,y} & d_{ge,x}d_{eh,z} \\ d_{ge,y}d_{eh,x} & d_{ge,y}d_{eh,y} & d_{ge,y}d_{eh,z} \\ d_{ge,z}d_{eh,x} & d_{ge,z}d_{eh,y} & d_{ge,z}d_{eh,z} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Warto w tym miejscu powiedzieć trochę więcej o tej wielkości.

Polaryzacja światła jest wektorem. Wiązka spolaryzowana liniowo będzie charakteryzowana wektorem stałym w czasie. Dla odróżnienia wiązka spolaryzowana kołowo jest opisana wektorem zespolonym lub wektorem, który obraca się w czasie. W pierwszym przypadku wygodnie rozłożyć wektor polaryzacji na polaryzacje pionową oraz poziomą. W drugim — na prawo- oraz lewoskrętną. Wektory obu baz leżą w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się wiązki. Druga z polaryzacji jest bardzo naturalna, zwłaszcza w rozważaniach teoretycznych, ponieważ wiązka spolaryzowana kołowo będzie składać się z fotonów o takim samym zwrocie momentu pędu.

Moment pędu jest wielkością skwantowaną, więc przy absorpcji oraz emisji fotonu możliwa jest zmiana momentu pędu w atomie o $\pm\hbar$. Z tego faktu wynikają reguły wyboru, które pozwalają stwierdzić, które przejścia pomiędzy poziomami atomowymi są dozwolone. Możliwe polaryzacje emitowanych fotonów (prawo- i lewoskrętne) są oznaczane jako σ_- oraz σ_+ . Zwykle myślimy o wiązce światła, lecz fala elektromagnetyczna nie musi się rozchodzić w jednym kierunku, lecz w trzech wymiarach. Trzecim wektorem polaryzacji w omawianej bazie będzie prostopadła to σ_- i σ_+ , oznaczana jako π .

W doświadczeniu możemy kontrolować zawartość poszczególnych polaryzacji. Najłatwiej uzyskać polaryzację liniową stosując polaryzatory. Przepuszczając światło spolaryzowane liniowo przez płytkę ćwierćfalową można uzyskać polaryzację kołową. Tym samym wykonalne jest odpowiednie zmieszanie obu polaryzacji.

W doświadczeniu używa się na przykład dwóch polaryzacji liniowych, ze względu na łatwiejsze ich otrzymywanie niż polaryzacji kołowych. Różne przejścia atomowe są także związane z przekazywaniem momentu pędu. Biorąc pod uwagę wszystkie przejścia możemy wyznaczyć własności promieniowania emitowanego przez atom dla zadanego sygnału (innymi słowy — jaki jest udział różnych polaryzacji wyjściowych w zależności od wejściowych).

We wzorze (A.1) występuje iloczyn Ω_1 oraz Ω_2 , które z kolei są wyrażone przez iloczyny skalarne pola elektrycznego i momentu dipolowego. Możemy opisać tę sytuację w odrobinę inny,

tożsamy sposób, w którym zadany jest wektor pola elektrycznego. W takim opisie cała informacja o momencie dipolowym będzie trzymkana w tensorze podatności.

Tensor ten najłatwiej wyznaczyć w bazie polaryzacji prawo-, lewoskrętnej oraz do nich prostopadłej. Te polaryzacje odpowiadają przejściom, w których zmienia się magnetyczna liczba m_F o $+1, -1$ lub 0 , stąd wybór takiej bazy jest naturalny. Tensor opisuje przekształcenia liniowe, więc tensory dla wielu przejść można dodać. Jednak okazuje się, że dla dwóch linii atomowych rubidu oznaczanych symbolami D_1 oraz D_2 macierze (z dokładnością do permutacji wektorów bazy) są diagonalne.

Tensor podatności jest tensorem 2 rzędu, więc macierzą, będącą formą kwadratową, którą można zdiagnozować. W tym momencie warto podkreślić fakt, że cały czas pracujemy w bazie, która jest wygodna dla tego układu — układu atomu. Mianowicie jest to baza rzutu momentu pędu, a fala świetlna w niej wyrażona ma trzy składowe: polaryzację lewoskrętną, prawoskrętną oraz prostopadłą, zwyczajowo w fizyce atomowej oznaczane kolejno jako σ_- , σ_+ oraz π . Interpretacja obiektu (A.2) jest następująca — elementy są proporcjonalne do amplitudy prawdopodobieństwa zajścia procesu pochłonięcia fotonu o jednej polaryzacji i wyemitowaniu w drugiej polaryzacji. $\mathcal{D}$ jest formą kwadratową, więc obkładając ją unormowanym wektorem z obu stron można znaleźć ekstremum. Diagonalizując dostajemy informację o największej wartości własnej. Transformując odpowiednio bazę możemy się dowiedzieć jaka polaryzacja będzie odpowiednia w celu uzyskania optymalnej odpowiedzi (maksymalnej). Aby znaleźć składowe tego wektora należy użyć wektora własnego odpowiadającego największej wartości własnej.

Dodatek B

Parametry symulacji

Do przeprowadzenia symulacji użyto parametrów, które opisują układ, na którym są prowadzone badania doświadczalne [20]. Za poszerzenie związane z prędkościami atomów przyjęto 242 MHz (jest to wartość odpowiednia dla atomów rubidu w temperaturze około 300 K), czynnik związany ze stratami (emisja spontaniczna) wynosił $\Gamma = 5,75$ MHz. Przy numerycznym całkowaniu rozkład Boltzmanna dzielono na $5 \cdot 10^4$ klas prędkości.

Bibliografia

- [1] K. Hagiwara, A. Martin, D. Nomura, and T. v. Teubner, “Improved predictions for $g-2$ of the muon and,” *Physics Letters B*, vol. 649, no. 2, pp. 173–179, 2007.
- [2] K. Pachucki, “Theory of the lamb shift in muonic hydrogen,” *Physical Review A*, vol. 53, no. 4, p. 2092, 1996.
- [3] A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on bell’s theorem,” *Physical review letters*, vol. 67, no. 6, p. 661, 1991.
- [4] C. H. Bennett, G. Brassard, *et al.*, “Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing,” in *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, vol. 175, New York, 1984.
- [5] P. W. Shor, “Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring,” in *Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on*, pp. 124–134, IEEE, 1994.
- [6] E. F. Foundation, “Record 12-million-digit prime number nets \$100,000 prize,” 2009.
- [7] E. Martín-López, A. Laing, T. Lawson, R. Alvarez, X.-Q. Zhou, and J. L. O’Brien, “Experimental realization of shor’s quantum factoring algorithm using qubit recycling,” *Nature Photonics*, 2012.
- [8] W. Wasilewski and K. Banaszek, “Protecting an optical qubit against photon loss,” *Physical Review A*, vol. 75, no. 4, p. 042316, 2007.
- [9] F. Pastawski, L. Clemente, and J. Cirac, “Quantum memories based on engineered dissipation,” *Physical Review A*, pp. 1–14, 2011.
- [10] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and epr channels,” 1993.
- [11] R. Ursin, T. Jennewein, M. Aspelmeyer, R. Kaltenbaek, M. Lindenthal, P. Walther, and A. Zeilinger, “Communications: Quantum teleportation across the danube,” *Nature*, vol. 430, no. 7002, pp. 849–849, 2004.
- [12] X.-S. Ma, T. Herbst, T. Scheidl, D. Wang, S. Kropatschek, W. Naylor, B. Wittmann, A. Mech, J. Kofler, E. Anisimova, *et al.*, “Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward,” *Nature*, vol. 489, no. 7415, pp. 269–273, 2012.
- [13] Z. Merali, “Data teleportation: The quantum space race,” 2012.
- [14] G. Vallone, D. Bacco, D. Dequal, S. Gaiarin, V. Luceri, G. Bianco, and P. Villoresi, “Experimental Satellite Quantum Communications,” *arXiv: 1406.4051*, June 2014.
- [15] M. Hosseini, B. Sparkes, G. Campbell, P. Lam, and B. Buchler, “High efficiency coherent optical memory with warm rubidium vapour,” *Nature communications*, vol. 2, p. 174, 2011.

- [16] M. Bashkansky, F. K. Fatemi, and I. Vurgaftman, “Quantum memory in warm rubidium vapor with buffer gas,” *Optics Letters*, vol. 37, no. 2, pp. 142–144, 2012.
- [17] V. Acosta, A. Jarmola, D. Windes, E. Corsini, M. Ledbetter, T. Karaulov, M. Auzinsh, S. Rangwala, D. J. Kimball, and D. Budker, “Rubidium dimers in paraffin-coated cells,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 8, p. 083054, 2010.
- [18] K. Saeedi, S. Simmons, J. Z. Salvail, P. Dluhy, H. Riemann, N. V. Abrosimov, P. Becker, H.-J. Pohl, J. J. Morton, and M. L. Thewalt, “Room-temperature quantum bit storage exceeding 39 minutes using ionized donors in silicon-28,” *Science*, vol. 342, no. 6160, pp. 830–833, 2013.
- [19] D. B. Higginbottom, B. M. Sparkes, M. Rancic, O. Pinel, M. Hosseini, P. K. Lam, and B. C. Buchler, “Spatial-mode storage in a gradient-echo memory,” *Physical Review A*, vol. 86, no. 2, p. 023801, 2012.
- [20] R. Chrapkiewicz, W. Wasilewski, and C. Radzewicz, “How to measure diffusional decoherence in multimode rubidium vapor memories?,” *arXiv preprint arXiv:1304.5396*, 2013.
- [21] C. Raman and K. Krishnan, “A new type of secondary radiation,” *Nature*, vol. 121, no. 3048, pp. 501–502, 1928.
- [22] R. Dicke, “Coherence in spontaneous radiation processes,” *Physical Review*, vol. 93, no. 1, p. 99, 1954.
- [23] H. Krauter, C. A. Muschik, K. Jensen, W. Wasilewski, J. M. Petersen, J. I. Cirac, and E. S. Polzik, “Entanglement generated by dissipation and steady state entanglement of two macroscopic objects,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 107, p. 080503, Aug 2011.
- [24] K. Hammerer, A. S. Sørensen, and E. S. Polzik, “Quantum interface between light and atomic ensembles,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 1041–1093, Apr 2010.
- [25] L. Allen, J. Eberly, and K. Rzążewski, *Rezonans optyczny*. Państwowe Wydaw. Naukowe, 1981.
- [26] T. R. Gentile, B. J. Hughey, D. Kleppner, and T. W. Ducas, “Experimental study of one- and two-photon rabi oscillations,” *Phys. Rev. A*, vol. 40, pp. 5103–5115, Nov 1989.
- [27] R. W. Boyd, *Nonlinear optics*. Academic press, 2003.
- [28] M. G. Raymer, I. A. Walmsley, J. Mostowski, and B. Sobolewska, “Quantum theory of spatial and temporal coherence properties of stimulated raman scattering,” *Phys. Rev. A*, vol. 32, pp. 332–344, Jul 1985.
- [29] B. M. Project, H. Bateman, and A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*. No. t. 2 in Higher Transcendental Functions, Dover Publications, Incorporated, 2007.
- [30] B. McGuyer, R. Marsland III, B. Olsen, and W. Happer, “Cusp kernels for velocity-changing collisions,” *Physical review letters*, vol. 108, no. 18, p. 183202, 2012.
- [31] R. Marsland, B. H. McGuyer, B. A. Olsen, and W. Happer, “Spin-velocity correlations of optically pumped atoms,” *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 023404, Aug 2012.
- [32] I. Birula and Z. Birula, *Quantum Electrodynamics by Iwo Białynicki-Birula and Zofia Białynicki-Birula*. International series of monographs in natural philosophy, v. 70, Elsevier Science & Technology, 1975.
- [33] T. Holstein and H. Primakoff, “Field dependence of the intrinsic domain magnetization of a ferromagnet,” *Phys. Rev.*, vol. 58, pp. 1098–1113, Dec 1940.