

# Rozdział 2

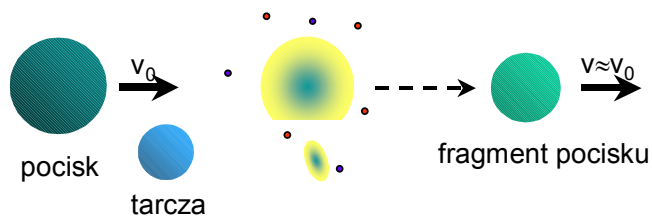
## Reakcja fragmentacji



26

## Idea podstawowa

Zderzenia ciężkich jonów przy energiach relatywistycznych



Początki : badanie promieniowania kosmicznego

- podział zderzeń na centralne i peryferyjne (Brand & Peters PR77(1950)54)
- przekrój czynny na reakcję – przybliżenie „czarnych kul” :

$$\sigma = \pi r_0^2 (A_p^{1/3} + A_t^{1/3} - \delta)^2$$

parametr przekrycia (overlap),  
związany z rozmyciem powierzchni

- ten prosty model geometryczny dobrze opisywał średnią drogę swobodną cząstek PK o  $2 \leq Z \leq 26$  w emulsjach fotograficznych
- obserwacja, że przekrój na reakcję nie zależy od energii pocisków w przedziale 0.1 – 30 A GeV (Cleghorn i in., Can. J. Phys.46(1968)572)



27

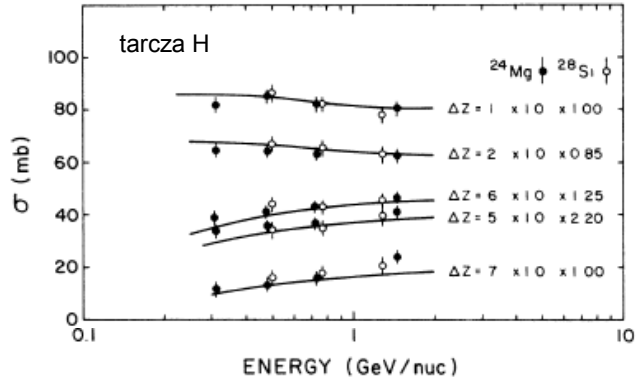
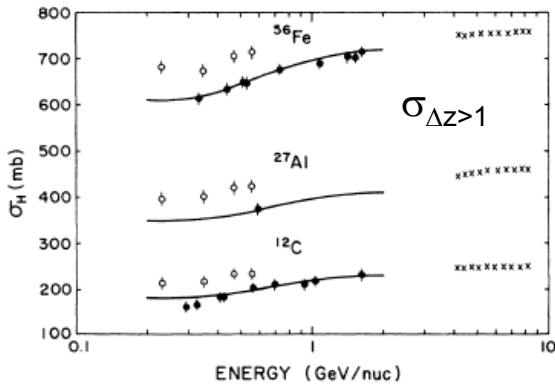
# Pierwsze badania laboratoryjne

Początek lat 70-tych – przyspieszanie ciężkich jonów do energii relatywistycznych.  
Przodującą rolę odgrywał synchrotron Bevalac w LBL (USA)

→ jony  ${}^6\text{Li}$ ,  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{14}\text{N}$ ,  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$ ,  ${}^{40}\text{Ar}$ ,  ${}^{56}\text{Fe}$  o energiach 0.1 – 2.1 A GeV

Główne wnioski :

→ potwierdzenie słabej zależności  $\sigma$  od energii

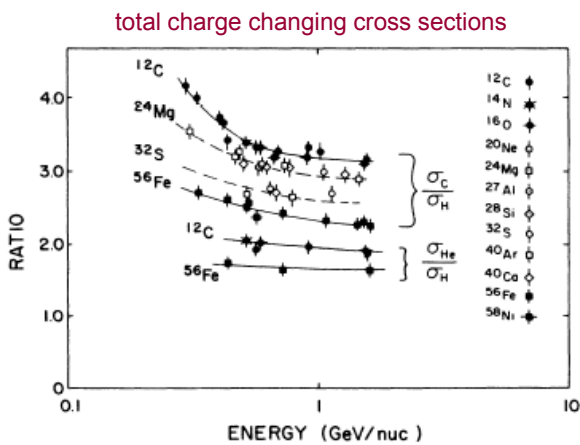


Webber i in. PRC41(1990)520, 533

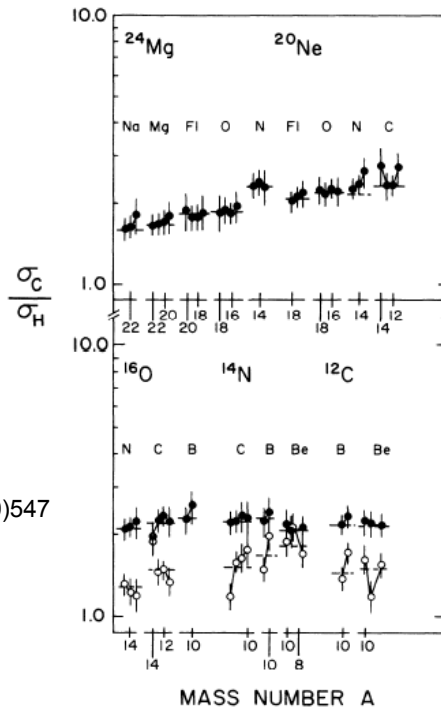


→ faktoryzacja :  $\sigma_{pt}^f \cong \gamma_{pf} \gamma_t$

czynniki zależny tylko od tarczy →  $\gamma_t \propto A_t^{1/4}$



Webber i in. PRC41(1990)547



# Parametryzacje przekrojów czynnych

Wraz z napływem doświadczalnych wartości przekrojów czynnych na produkcję izotopów w reakcji fragmentacji, a także kruszenia (spalacji) przez protony o energii > 1 GeV, pojawiły się próby opisanie wyników przy pomocy względnie prostych funkcji analitycznych

- cel praktyczny : proste szacowanie nieznanych przekrojów czynnych
- opis globalny, bez żadnego związku z fizyką oddziaływania między jonami !

- Silberberg & Tsao, Astrophys. J. Suppl. 25 (1973) 315, 335
- Webber i in. PRC 41 (1990) 566

Obecnie najbardziej popularna i powszechnie stosowana jest parametryzacja EPAX (Experimental Parametrization of fragmentation Cross sections)

- K. Sümmerer, ... B. Szweyryn, ... i in., PRC 42 (1990) 2546
- K. Sümmerer & B. Blank, PRC 61 (2000) 034607



30

## Parametryzacja EPAX

Przekrój czynny na wytworzenie fragmentu (A,Z) z pocisku (A<sub>p</sub>,Z<sub>p</sub>) na tarczy (A<sub>t</sub>,Z<sub>t</sub>) :

$$\sigma(A, Z) = Y_A \cdot \sigma(Z),$$

$$Y_A = S \cdot P \cdot \exp(-P \cdot (A_p - A)),$$

$$S = S_2 \cdot (A_p^{1/3} + A_t^{1/3} + S_1),$$

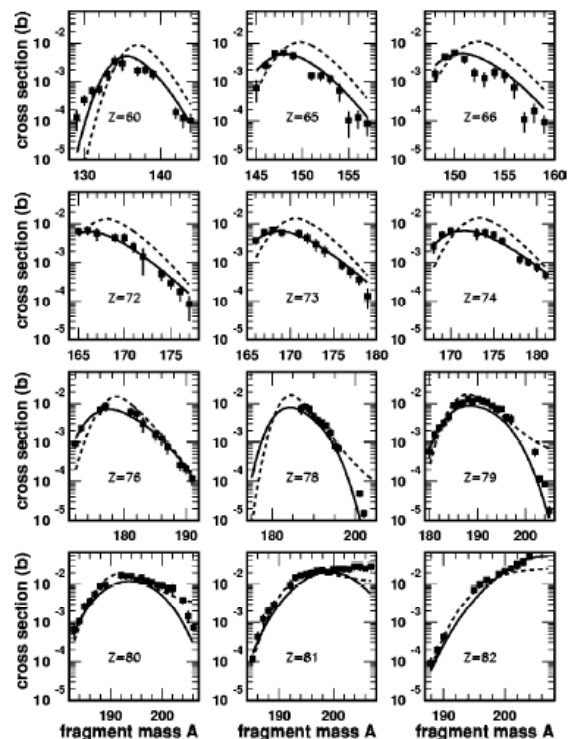
$$\ln P = P_2 \cdot A_p + P_1,$$

$$\sigma(Z) = n \cdot \exp(-R \cdot |Z_{prob} - Z|^{U_{n(p)}}),$$

$$Z_{prob} = Z_\beta + \Delta,$$

$$Z_\beta = A / (1.98 + 0.0155 \cdot A^{2/3})$$

Najnowsza wersja (EPAX 2.1) zawiera w sumie 24 parametry



1 A GeV <sup>208</sup>Pb + natCu



31

# EPAX on-line

→ [www-w2k.gsi.de/frs/index.asp](http://www-w2k.gsi.de/frs/index.asp)

Address  Go

## The GSI Fragment Separator Website

Your portal to information about the FRS!  
People Research Meetings Technical info

You are in GSI » FRS

### Welcome to the Fragment Separator (FRS) at GSI!

At the FRS website, you can learn more about:

- » Introduction to the FRS (short version)
- » Group members
- » Research & publications
- » Meetings & conferences
- » **Technical information** (hardware & software)
- » The Super FRS project [new window!]

Recent & upcoming activities

Address  Go

### Software

- » On-line versions of the FRS Sharp calculator [new window!] conversion programs.
- » On-line versions of the FRS Degradator calculator [new window!]
- » ATIMA [new window!], a program to calculate various interactions of particles and matter
- » Use CHARGE [new window!] to calculate charge-changing cross sections and the like
- » GLOBAL [new window!], another program to calculate properties of atoms passing through matter
- » MOCADI [new window!], a Monte Carlo simulation for beam transport through optical systems
- » GICQ [new window!], a program for ion-optical calculations
- » **EPAX** [new window!], an empirical formula to estimate fragmentation cross sections ("safe" **ion-line version!** [new window!])
- » Use LIESCHEN [new window!] to predict the ion-optical separation of secondary beams
- » EMD [new window!] calculates the electromagnetic interaction of heavy-ion beams with target atoms
- » Try AMADEUS [new window!], a magnet and degrader utility for scaling

### Beam intensities & cross sections

- » Table of primary beam intensities [new window!] (from the accelerator division)

More info will be added later...

32

<http://www-w2k.gsi.de/frs/technical.asp> → EPAX

## EPAX Version 2.1

An Empirical Parametrization of Projectile-Fragmentation Cross Sections  
by K. Sümmerer and B. Blank

Welcome to this interactive version of EPAX V2.1! This program will assist you in estimating production cross sections for projectile fragmentation reaction products, using a parametrization based on experimental data from high-energy reactions.

Please enter the following information:

NOTE: Setting  $Z(\text{fragment}) = 999$  calculates all possible isotopes (no transfer), while  $A(\text{fragment})=999$  calculates all possible isotopes with  $Z(\text{fragment})!$

**Projectile: Target: Fragment:**

A:  A:  A:

Z:  Z:  Z:

If you want to learn more about the EPAX parametrization, such as the underlying physics and the inherent assumptions and limitations, check out these sources:

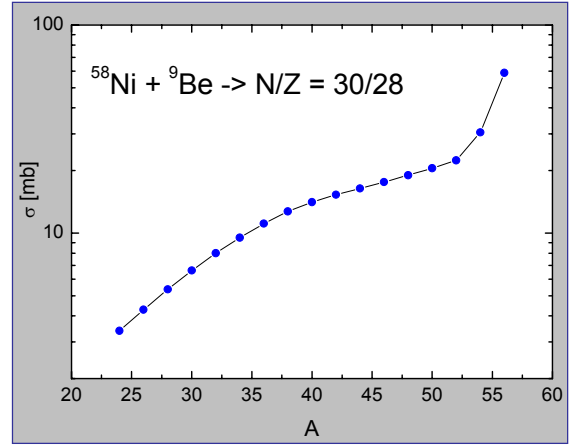
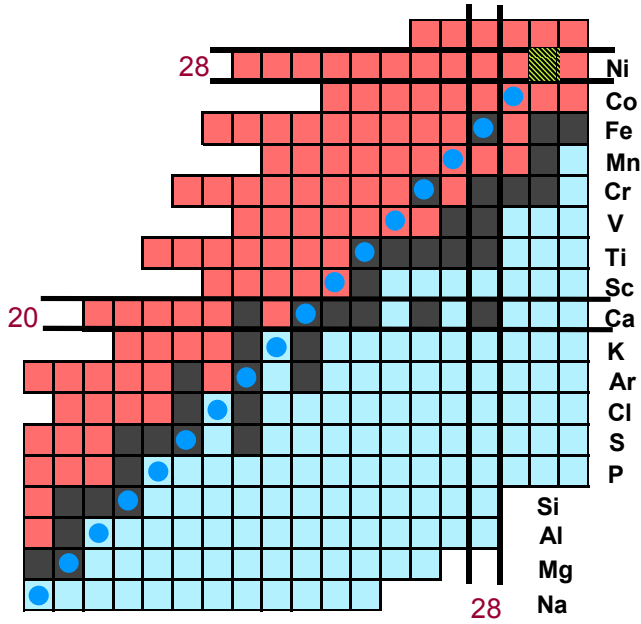
1. K. Sümmerer *et al.*, Phys. Rev. C42, 2546 (1990) [[PDF 1457 KB](#)]
2. K. Sümmerer and B. Blank, Phys. Rev. C61, 034607 (2000) [[PDF 191 KB](#)]
3. K. Sümmerer, "[EPAX Version 2: A modified empirical parametrization of fragmentation cross sections](#)"

Remember that in order to obtain production rates, the cross sections must be folded with beam intensity and target thickness. Furthermore, the total transmission must be taken into account to predict rates at the final focus of the fragment separator. The program MOCADI can be used for these purposes.

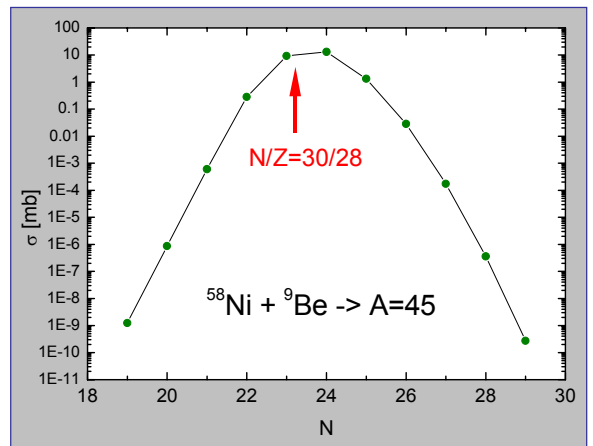
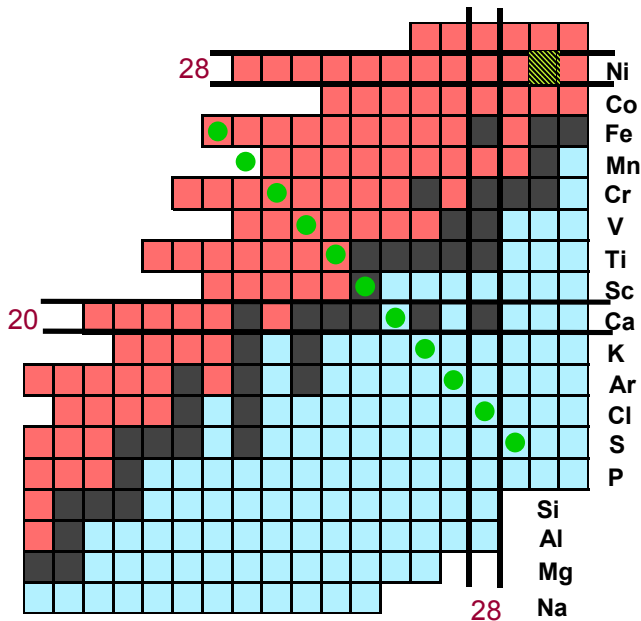
33

# EPAX – przykłady

Przewidywania formuły EPAX dla reakcji  $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$



Przewidywania formuły EPAX dla reakcji  $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$



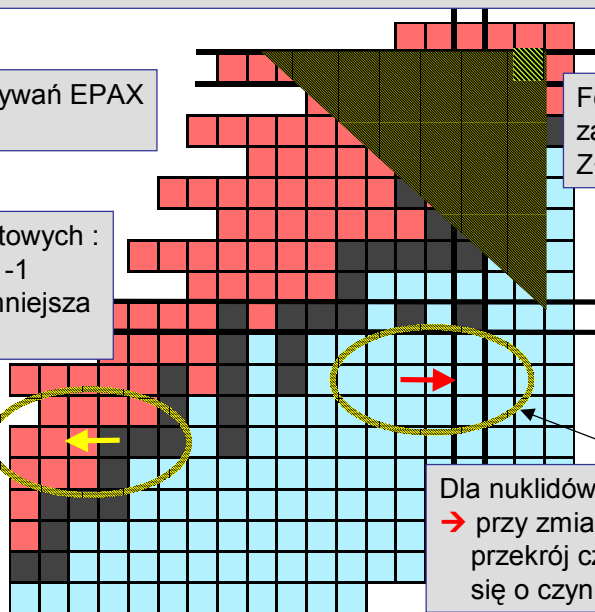
Parametryzacja EPAX nie stosuje się do pocisków rozszczepialnych ( $Z > 82$ ) !  
 Wartości przekrojów na wytworzenie fragmentów bliskich pocisku  
 (szczególnie  $\sigma_{-1n}$  i  $\sigma_{-2n}$ ) mogą być nierealne !

Dokładność przewidywań EPAX  
 → czynnik 2

Formuła EPAX ma zastosowanie tylko gdy  
 $Z < Z_p$  i  $N < N_p$

Dla nuklidów n-deficytowych :  
 → przy zmianie  $\Delta N = -1$   
 przekrój czynny zmniejsza się o czynnik  $\approx 20$

Dla nuklidów n-nadmiarowych :  
 → przy zmianie  $\Delta N = +1$   
 przekrój czynny zmniejsza się o czynnik  $\approx 10$



36

## Fizyczne modele fragmentacji

### Podstawowa idea (Serber 1947)

- reakcja jądrowa przy energii relatywistycznej ma dwa wyraźne etapy:
  - 1 – krótkie oddziaływanie ( $\approx 10^{-23}$  s) zmienia skład pocisku i tarczy oraz prowadzi do ich wzbudzenia; pocisk  $\Rightarrow$  prefragment,
  - 2 – termalizacja i deekscytacja; parowanie nukleonów i lekkich jąder, rozszczepienie; skala czasu  $\approx 10^{-16} - 10^{-21}$  s;  $\Rightarrow$  fragment pocisku.

### Różne podejścia do opisu etapu 1

- ▶ **mikroskopowe** – np. model INtranuclear Cascade (INC) : prefragment tworzony w wyniku serii (kaskady) zderzeń między prawie swobodnymi nukleonami ( $\sigma_{NN}$ , rachunki Monte Carlo).  
 Model ISABEL : Yariv & Fraenkel, PRC 20 (1979) 2227.
- ▶ **makroskopowe** – model abrasion-ablation : obraz geometrycznego obcięcia pocisku i tarczy, podział na obserwatorów i uczestników reakcji (participant – spectator).

### Opis etapu 2

- ▶ statystyczne obliczenia procesu parowania; programy Monte Carlo.  
 Program PACE Blaich i in. PRC 45 (1992) 689.



37

# Model abrasion – ablation

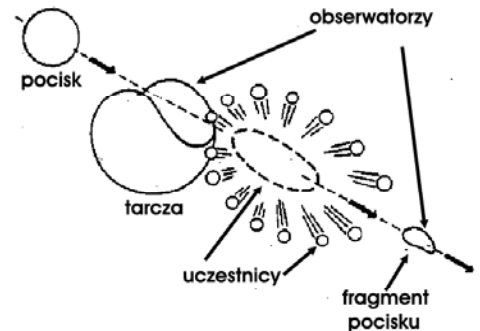
abrasion – otarcie, przetarcie, wyskrobanie

ablation – odjęcie, oderwanie, erozja lodowca

Pierwsze podejście (i nazwa ?) – Bowman, Świątecki & Tsang LBL report, 1973.

Obraz makroskopowy i geometryczny :

- w wyniku zderzenia dwóch kul w pocisku (i w tarczy) powstaje cylindryczne „wycięcie”, którego kształt i rozmiar zależy od parametru zderzenia;
- energia wzbudzenia prefragmentu wynika z nadmiaru powierzchni w stosunku do kuli o tej samej objętości.



W bardziej rozwiniętych rachunkach uwzględniano realistyczne rozkłady materii jądrowej (rozmycie powierzchni). Niepowodzenia modelu upatrywano jednak ciągle w niepoprawnym szacowaniu energii wzbudzenia.

Inne podejście : zaawansowany i często cytowany model

ABRABLA – Gaimard & Schmidt NPA 531 (1991) 709.



38

# Model ABRABLA

- Liczbę usuniętych nukleonów oblicza się z obrazu geometrycznego („przecinanie” się kul).
- Obraz Fermiego : usunięcie nukleonów tworzy wolne miejsca na orbitach („dziury”), stany pozostałych nukleonów nie zmieniają się. Energia wzbudzenia prefragmentu jest sumą energii „dziur” względem powierzchni Fermiego. Stany z których usuwamy nukleony wybierane są losowo.
- Stosunek  $N/Z$  prefragmentu wyznaczony z założenia o braku korelacji między usuwanymi protonami i neutronami  $\Rightarrow$  szerokie rozkłady ładunkowe.
- Deekscytację prefragmentu poprzez parowanie cząstek opisuje się statystycznym programem MC typu PACE.



39

# Dygresja: model Fermiego

Rozważamy nieoddziaływujące fermiony w studni potencjału.

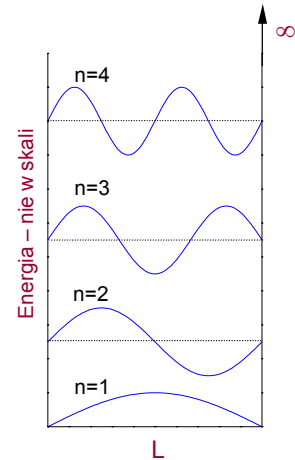
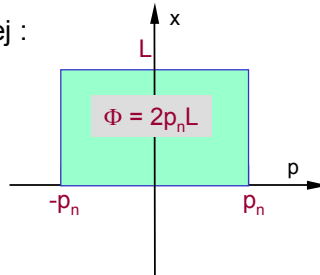
Łatwy początek : przypadek 1-wymiarowy i nieskończenie głęboka studnia;  
 bez r-nia Schrödingera  $\Rightarrow$  f.falowa musi znikać na ściankach, czyli w studni musi zmieścić się całkowita liczba połówek fali de Broglie'a

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda = \frac{h}{p} \rightarrow p_n = \frac{n \cdot h}{2L}, \quad E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2 \cdot h^2}{8mL^2}.$$

Liczymy stany w przestrzeni fazowej :

$$n \cdot h = 2L \cdot p_n \rightarrow n = \frac{\Phi}{h},$$

czyli na jeden stan przypada  $h$  przestrzeni fazowej



Uogólnienie na przypadek 3-wymiarowy :

na jeden stan przypada objętość  $h^3$  w przestrzeni fazowej.

Dodatkowa degeneracja związana ze spinem  $\Rightarrow$  dla  $s = 1/2$  : dwa stany w komorce  $\rightsquigarrow$



Model jądra : nukleony w skończonej 3-wym. studni o objętości  $V$ .

Liczbę cząstek jednego rodzaju, np. neutronów, można przedstawić jako :

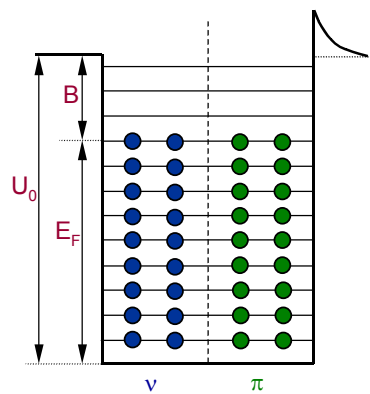
$$\begin{aligned} N &= 2 \frac{V}{h^3} \int_0^{p_F} d^3 p = 2 \frac{V}{h^3} \iiint p^2 dp d\varphi \sin\theta d\theta \\ &= 2 \frac{V}{h^3} 4\pi \int p^2 dp = \frac{8\pi V}{(2\pi \hbar)^3} \frac{p_F^3}{3} = \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3}. \end{aligned}$$

Czyli pęd Fermiego (dla neutronów) :

$$p_{F,N} = \hbar \left( 3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{1/3}.$$

Podstawiając :  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$  dostajemy :

$$p_{F,N} = \hbar \left( \frac{9\pi N}{4r_0^3 A} \right)^{1/3} = \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9}{4}\pi \frac{N}{A} \right)^{1/3}, \quad \text{a dla protonów : } p_{F,Z} = \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9}{4}\pi \frac{Z}{A} \right)^{1/3}.$$



Zakładając  $N=Z$  i pomijając siły kulombowskie mamy:

$$p_{F,Z} = p_{F,N} = \frac{\hbar}{r_0} \left( \frac{9}{8}\pi \right)^{1/3} = \frac{\hbar c}{r_0} \left( \frac{9}{8}\pi \right)^{1/3} \frac{1}{c} = \frac{197 \text{ MeV fm}}{1.2 \text{ fm}} 1.52 \frac{1}{c} = 250 \text{ MeV}/c.$$





Zatem energia Fermiego wynosi :

$$E_F = \frac{p_F^2}{2m} \approx \frac{(250 \text{ MeV}/c)^2}{2 \cdot 939 \text{ MeV}/c^2} = 33 \text{ MeV}.$$

Wiedząc (z doświadczenia) że energia wiązania nukleonu jest  $\approx 8 \text{ MeV}$  możemy oszacować przy okazji głębokość studni potencjału  $\Rightarrow U_0 \approx 41 \text{ MeV}$ .

→ **Ważny wniosek :**

jeśli energia pocisku jest dużo większa niż 33 A MeV, obraz geometryczny jest uzasadniony ! Nukleony poza obszarem przekrywania się pocisku i tarczy mają mały wpływ na przebieg reakcji.

Jak gęstość stanów zależy od energii ?

Ilość stanów w powłoce  $(p, p+dp)$  :  $dn \propto 4\pi p^2 dp$ ,

czyli :

$$\rho = \frac{dn}{dE} \propto p^2 \frac{dp}{dE}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} \rightarrow p = \sqrt{2mE} \quad \longrightarrow \quad \rho(E) \propto \frac{E}{\sqrt{E}} = \sqrt{E}.$$

$$\frac{dp}{dE} = \frac{m}{\sqrt{2mE}}$$



## Model ABRABLA c.d.

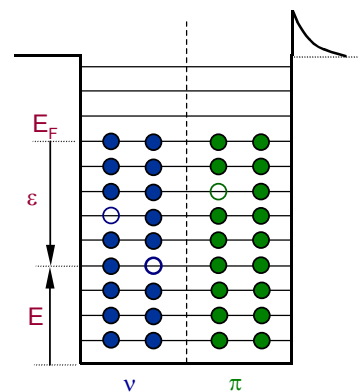
**Energia wzbudzenia w obrazie Fermiego**

Zderzenie w sposób nagły i losowy usuwa nukleony z orbit.

- Prawdopodobieństwo usunięcia nukleonu ze stanu o energii E (względem dna studni) jest proporcjonalne do gęstości stanów  $\rho(E)$ .
- Całkowita energia wzbudzenia jest sumą energii  $\epsilon_i$  usuniętych nukleonów, liczonych względem poziomu Fermiego.

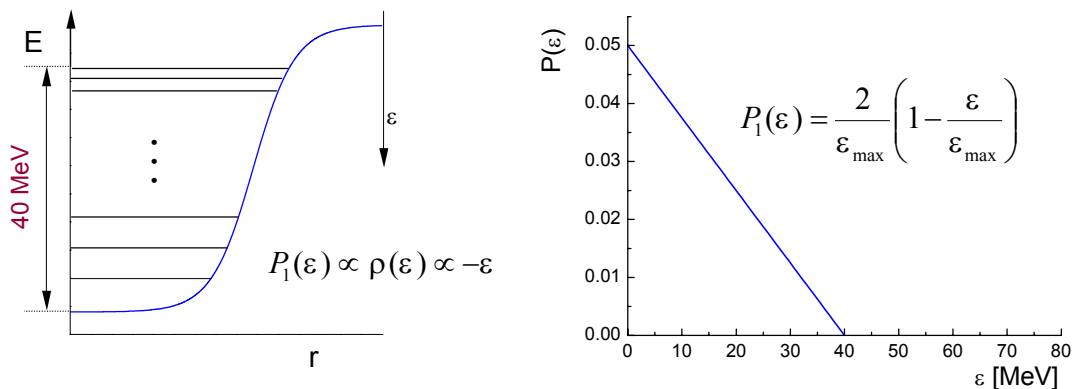
Gęstość stanów  $\rho(E)$  dla potencjału

- ▶ nieskończonej studni :  $\rho(E) \propto \sqrt{E}$ ,
- ▶ oscylatora harmonicznego :  $\rho(E) \propto E^2$ ,
- ▶ Woodsa-Saxona :  $\rho(E) \propto E$ .



→ W modelu zakłada się głębokość potencjału WS : 47.4 MeV  
i poziom Fermiego : - 7.4 MeV, czyli usunięcie jednego nukleonu prowadzi do energii wzbudzenia od 0 do 40 MeV.

- Rozkład energii wzbudzenia przy jednym oderwanym nukleonie :



→ Średnia energia wzbudzenia  $\langle \epsilon \rangle = \epsilon_{\max}/3 = 13.3$  MeV.

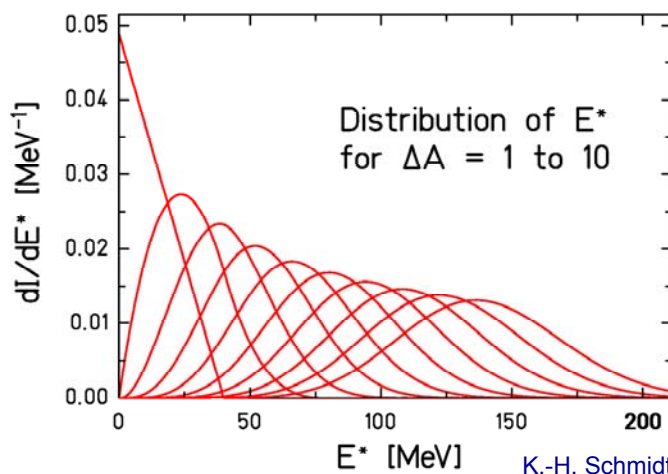


- Gdy odrywamy dwa nukleony, energie powstałych dziur mogą się na różne sposoby złożyć do wypadkowej energii wzbudzenia  $\epsilon$  :

$$P_2(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_{\max}} P_1(x) \cdot P_1(\epsilon - x) dx$$

- Przy  $n$  oderwanych nukleonach :

$$P_n(\epsilon) = \int_0^{\epsilon_{\max}} P_{n-1}(x) \cdot P_1(\epsilon - x) dx$$



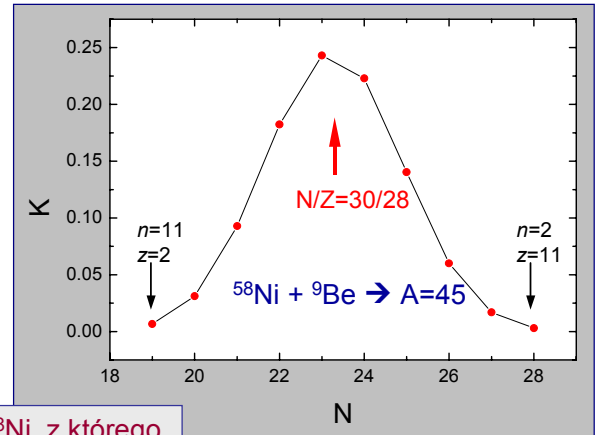
Rozkład N/Z wśród prefragmentów przy ustalonej liczbie usuniętych nukleonów  
 → brak korelacji między neutronami i protonami.

Jeśli z pocisku o liczbach  $N_p, Z_p$  ( $A_p = N_p + Z_p$ ) usuwamy  $n$  neutronów i  $z$  protonów, czyli  $a = n + z$  nukleonów, to :

$$\sigma(N_p - n, Z_p - z) = K \sigma(A_p - a),$$

gdzie  $K$  jest czynnikiem kombinatorycznym :

$$K = \frac{\binom{N_p}{n} \binom{Z_p}{z}}{\binom{A_p}{a}}$$



Przykład dla  $^{58}\text{Ni}$ , z którego usuwamy  $a=13$  nukleonów

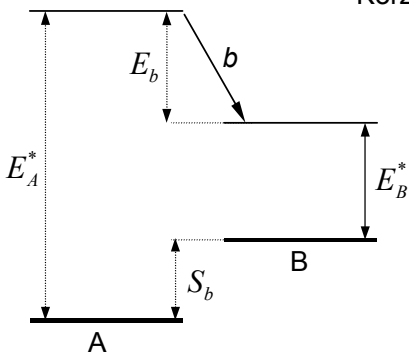


Parowanie cząstek ze wzbudzonego prefragmentu.

→ Rozważmy proces, w którym wzbudzone jądro  $A$  emituje cząstkę  $b$ , w wyniku czego powstaje wzbudzone jądro  $B$ . Stałą rozpadu, czyli prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu, można obliczyć na podstawie Złotej Reguły Fermiego :

$$\lambda_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \rho_f, \text{ gdzie } \rho_f \text{ jest gęstością stanów końcowych.}$$

Korzystamy z tej reguły dla procesu w obydwu kierunkach :



$$\lambda_{AB} = \frac{dW_b(E_b)}{dE_b} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{ABb}|^2 \rho_B \rho_b,$$

$$\lambda_{BA} = W_c(E_b) = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{bBA}|^2 \rho_A, \quad |H_{ABb}|^2 = |H_{bBA}|^2.$$

Czyli, po podzieleniu stronami :

$$\frac{dW_b(E_b)}{dE_b} \rho_A(E_A^*) = W_c(E_b) \rho_B(E_B^*) \frac{dn_b}{dE_b},$$

$$E_B^* = E_A^* - S_b - E_b; \quad W_c(E_b) = j_b \sigma_c(E_b); \quad j_b = nv_b = \frac{v_b}{V};$$



$$\frac{dW_b(E_b)}{dE_b} \rho_A(E_A^*) = W_c(E_b) \rho_B(E_B^*) \frac{dn_b}{dE_b},$$

$$E_B^* = E_A^* - S_b - E_b; \quad W_c(E_b) = j_b \sigma_c(E_b); \quad j_b = nv_b = \frac{v_b}{V};$$

$$\frac{dn_b}{dE_b} = \frac{V 4\pi p_b^2 dp_b}{h^3 dE_b} g \implies \frac{dn_b}{dE_b} = \frac{4\pi V g}{8\pi^3 \hbar^3} m_b p_b = \frac{V g}{2\pi^2 \hbar^3} m_b p_b$$

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad dE = \frac{p dp}{m}$$

$$\begin{aligned} \frac{dW_b(E_b)}{dE_b} &= \frac{1}{\rho_A(E_A^*)} \left( \sigma_c(E_b) \frac{v_b}{V} \right) \rho_B(E_A^* - S_b - E_b) \left( \frac{V g}{2\pi^2 \hbar^3} m_b p_b \right) \\ &= \frac{g m_b}{\pi^2 \hbar^3 \rho_A(E_A^*)} \sigma_c(E_b) \rho_B(E_A^* - S_b - E_b) E_b. \end{aligned}$$

„Szerokość” ze względu na emisję cząstki  $b$  :

$$\Gamma_b = \hbar \lambda = \hbar \int_0^{E_A^* - S_b} \frac{dW_b(E_b)}{dE_b} dE_b = \frac{g m_b}{\pi^2 \hbar^2 \rho_A(E_A^*)} \int_0^{E_A^* - S_b} \sigma_c(E_b) \rho_B(E_A^* - S_b - E_b) E_b dE_b.$$



Na przykład dla emisji neutronu :

$$\Gamma_n = \frac{2m_n}{\pi^2 \hbar^2 \rho_A(E_A^*)} \int_0^{E_A^* - S_n} \sigma_c(E_n) \rho_B(E_A^* - S_n - E_n) E_n dE_n.$$

Grube przybliżenie :  $\sigma_c(E_n) = \pi R^2$ ,

$$\Gamma_n \approx \frac{1}{2\pi \rho_A(E_A^*)} \frac{4m_n R^2}{\hbar^2} \int_0^{E_A^* - S_n} \rho_B(E_A^* - S_n - E_n) E_n dE_n.$$

W przypadku cząstek naładowanych ( $p, \alpha$ ) trzeba uwzględnić barierę kulombowską :  $\sigma_c(E_p) = \pi R^2 \left( 1 - \frac{B}{E_p} \right)$ ,

$$\Gamma_p \approx \frac{1}{2\pi \rho_A(E_A^*)} \frac{4m_p R^2}{\hbar^2} \int_B^{E_A^* - S_p} \left( 1 - \frac{B}{E_p} \right) \rho_B(E_A^* - S_p - E_p) E_p dE_p,$$

a przy zamianie zmiennej :  $\varepsilon = E_p - B$  :

$$\Gamma_p \approx \frac{1}{2\pi \rho_A(E_A^*)} \frac{4m_p R^2}{\hbar^2} \int_0^{E_A^* - S_p - B} \rho_B(E_A^* - S_p - B - \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon.$$



→ A zatem szerokość  $\Gamma$  można przedstawić w uniwersalnej postaci :

$$\Gamma \approx \frac{1}{2\pi \rho_A(E_A^*)} \frac{4m_n R^2}{\hbar^2} \int_0^{\varepsilon_{\max}} \rho_B(\varepsilon_{\max} - \varepsilon) \varepsilon d\varepsilon ,$$

przy czym dla neutronów :  $\varepsilon = E_n$  i  $\varepsilon_{\max} = E_A^* - S_n$ ,

a dla cząstek naładowanych :  $\varepsilon = E_p - B$  i  $\varepsilon_{\max} = E_A^* - S_p - B$ .

→ Gęstość stanów w modelu Fermiego ( $\Rightarrow$  wykłady Z.Janasa :

<http://zsj.fuw.edu.pl/janas>) :

$$\rho(E^*) \propto e^{2\sqrt{aE^*}} ,$$

gdzie  $a$  jest parametrem gęstości stanów, w przybliżeniu :  $a \approx A/10$

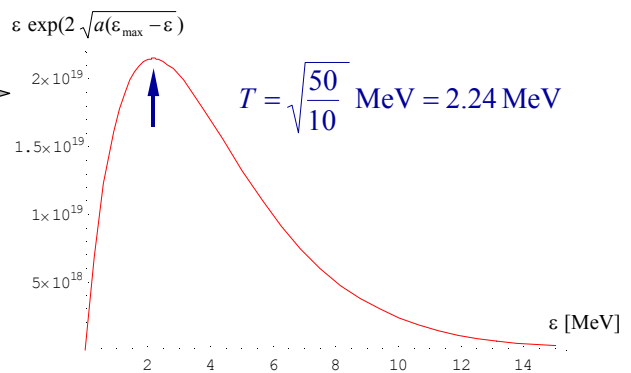
Wstawiając taką postać otrzymujemy :

$$\Gamma \propto \int_0^{\varepsilon_{\max}} e^{2\sqrt{a(\varepsilon_{\max} - \varepsilon)}} \varepsilon d\varepsilon .$$

→ Zauważmy przy okazji, że funkcja podcałkowa opisuje widmo energetyczne wyparowanych cząstek.



Przykład :  $a = 10 \text{ MeV}^{-1}$ ,  
 $\varepsilon_{\max} = 50 \text{ MeV}$ .



Funkcja ta bardzo przypomina widmo Maxwella energii cząstek emitowanych z pieca o określonej temperaturze.

Jest tak dlatego, że :

$$2\sqrt{a(\varepsilon_{\max} - \varepsilon)} = 2\sqrt{a\varepsilon_{\max}} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{\max}}} \approx 2\sqrt{a\varepsilon_{\max}} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_{\max}}\right) = 2\sqrt{a\varepsilon_{\max}} - \sqrt{\frac{a}{\varepsilon_{\max}}} \varepsilon ,$$

czyli

$$e^{2\sqrt{a(\varepsilon_{\max} - \varepsilon)}} \approx e^{2\sqrt{a\varepsilon_{\max}}} e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{a}}}} \propto e^{-\frac{\varepsilon}{T}} , \quad \Rightarrow \text{temperatura } T = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{a}} !$$

(Taka sama zależność jak u Z. Janasa  $\Rightarrow$  u nas  $k=1$ , czyli  $[T]=[MeV]$ )

Łatwe ćwiczenie : pokazać, że wartość temperatury pokrywa się z maksimum rozkładu „Maxwella”.

→ Parowanie cząstek opisane jest przez temperaturę określoną przez maksymalną energię wzbudzenia jądra końcowego (po emisji cząstki).



→ W tym obrazie łatwo obliczyć średnią energię parowanych cząstek.

Jeśli widmo określone jest funkcją :

$$f(\varepsilon) \propto \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}},$$

$$\text{to : } \langle \varepsilon \rangle = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon}{\int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon}.$$

$$\implies \langle \varepsilon \rangle = 2T = 2\sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{a}}$$

Całkę w liczniku łatwo obliczyć przez części :

$$\int_0^{\infty} \varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon = \underbrace{-\varepsilon^2 T e^{-\frac{\varepsilon}{T}}}_{=0} \Big|_0^{\infty} + 2T \int_0^{\infty} \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T}} d\varepsilon.$$

**Uwaga : omawiany rozkład energii nie odpowiada dokładnie rozkładowi Maxwella, który opisany jest wzorem :**

$$f(\varepsilon) \propto \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{T}}, \text{ i dla którego } \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2}T$$

Wracamy do wzoru na szerokość  $\Gamma \propto \int_0^{\varepsilon_{\max}} e^{2\sqrt{a(\varepsilon_{\max}-\varepsilon)}} \varepsilon d\varepsilon = I.$

Całkę tę można obliczyć analitycznie i z bardzo dobrym przybliżeniem otrzymuje się :

$$I = \frac{\varepsilon_{\max}}{a} e^{2\sqrt{a\varepsilon_{\max}}} \left( 1 - \frac{6\sqrt{a\varepsilon_{\max}} - 3}{4a^2} \right) \approx \frac{\varepsilon_{\max}}{a} e^{2\sqrt{a\varepsilon_{\max}}} = T^2 \rho(\varepsilon_{\max}).$$

Można też dokładnie obliczyć średnią energię cząstki w tym modelu i z dobrym przybliżeniem otrzymuje się wartość  $2T$ .



Ostatecznie szerokości związane z emisją cząstek dane są wzorami :

$$\Gamma_n \approx \frac{1}{2\pi \rho_A(E_A^*)} \frac{4m_n R^2}{\hbar^2} \frac{E_A^* - S_n}{a} \rho_B(E_A^* - S_n),$$

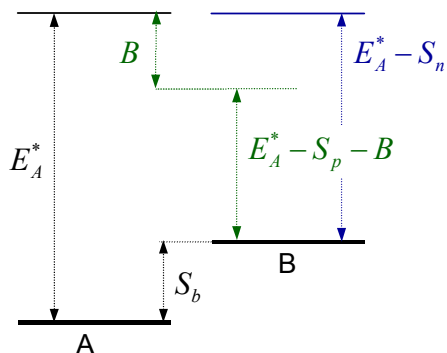
a dla cząstek naładowanych :

$$\Gamma_p \approx \frac{1}{2\pi \rho_A(E_A^*)} \frac{4m_p R^2}{\hbar^2} \frac{E_A^* - S_p - B}{a} \rho_B(E_A^* - S_p - B).$$

→ Prawdopodobieństwo wyparowania protonu jest mniejsze z powodu bariery kulombowskiej.

Na każdym etapie deekscytacji prawdopodobieństwa emisji cząstek oblicza się wzorem :

$$P_i = \frac{\Gamma_i}{\sum_k \Gamma_k}$$



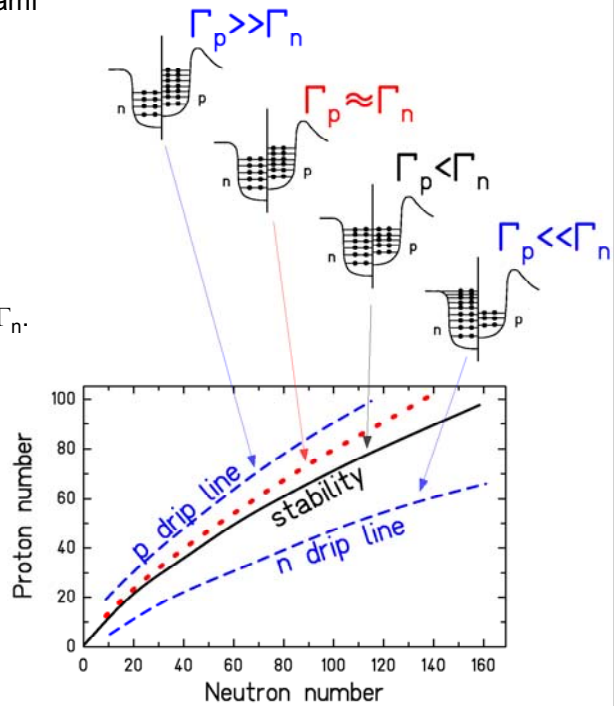
Uwaga : zaniedbaliśmy wpływ momentu pędu, poprawek powłokowych, sił pairing itd.



→ Model statystyczny :  
o wyborze między konkurencyjnymi kanałami rozpadu (emisja n, p,  $\alpha$ ) decydują gęstości stanów w jądrach końcowych.

→ Parowanie jest procesem statystycznym podobnym do dyfuzji – jądra końcowe (fragmenty) najczęściej znajdują się w pobliżu tzw. korytarza ewaporacyjnego (evaporation corridor), czyli tam gdzie  $\Gamma_p \approx \Gamma_n$ .

→ Parowanie protonów jest utrudnione przez barierę kulombowską  $\Rightarrow$  korytarz leży po stronie n-deficytowej



K.-H. Schmidt



## Porównanie modeli z doświadczeniem

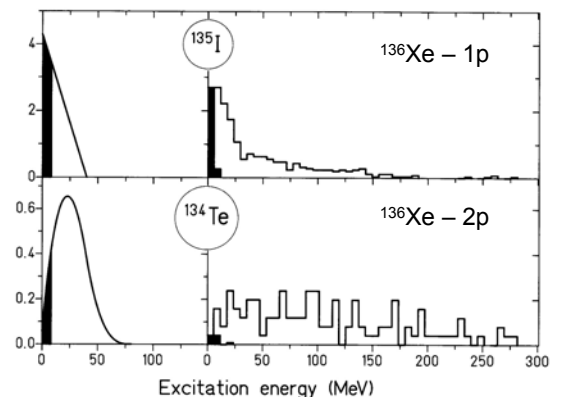
Pomiary przekrojów czynnych na oderwanie pojedynczych protonów.

Przykład :  $^{136}\text{Xe} + ^9\text{Be}$  @ 800 A MeV

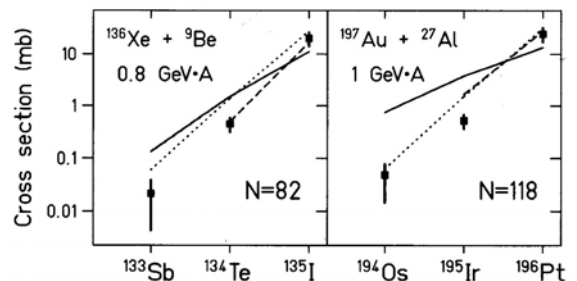
Schmidt i in. NPA 542 (1992) 699

W modelu ABRABLA zakłada się, że wkład dają tylko prefragmety o energii wzbudzenia poniżej progu na emisję cząstki (zimna fragmentacja).

Statistical abrasion model      Intranuclear cascade model



Modele	
—	EPAX (old)
⋯	ABRABLA
- - -	INC



Pomiary przekrojów czynnych na produkcję izotopów irydu i platyny w reakcji

$^{197}\text{Au} + ^9\text{Be}$  @ 1 A GeV

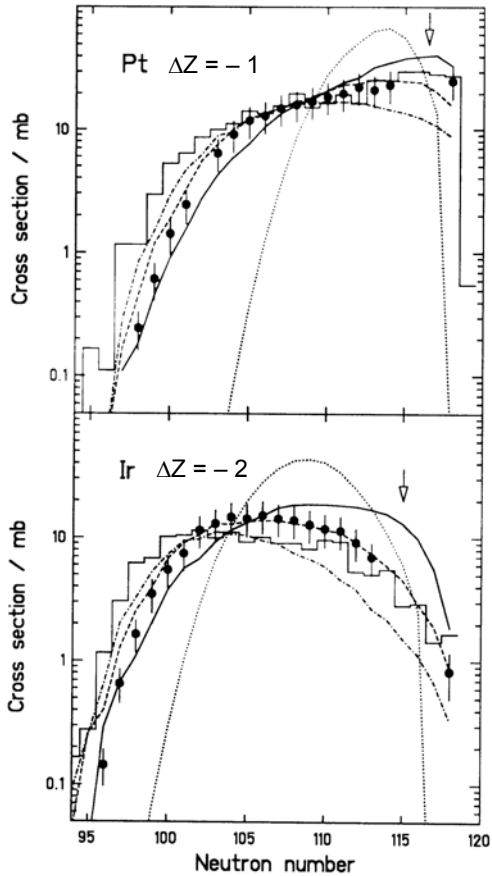
Schmidt i in. NPA 542 (1992) 699

Modele

- ABRABLA  $E^* = 13$  MeV/n
- - - ABRABLA  $E^* = 27$  MEV/n
- · - · - ABRABLA  $E^* = 53$  MeV/n
- ABRABLA N/Z wg Morrissey i in.
- ▬ INC

„Termometr” dla reakcji fragmentacji :

→ model ABRABLA działa, jeśli za średnią energię wzbudzenia na jeden oderwany nukleon przyjmie się 27 MeV.

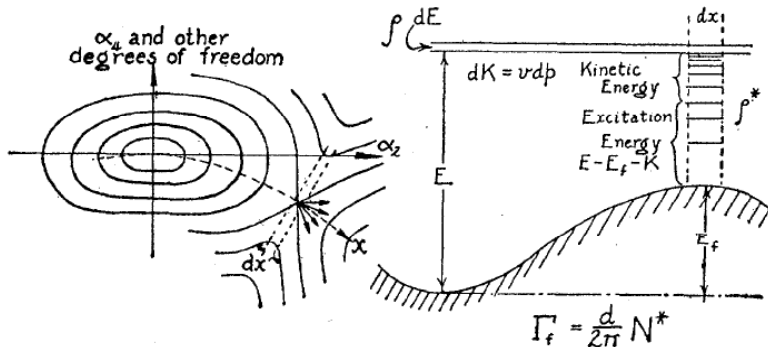


## Rozszczepienie pocisku

→ Ciężkie prefragmenty, o dużym współczynniku  $Z^2/A$  mogą ulegać rozszczepieniu. W opisie drugiego etapu reakcji należy włączyć tę możliwość jako konkurencyjną do parowania cząstek.

Mechanizm rozszczepienia – Bohr & Wheeler, PR56 (1939) 426.

→ Metoda stanów przejściowych : prawdopodobieństwo rozszczepienia zależy od gęstości stanów ponad barierą, a nie od gęstości stanów w jądrach końcowych (fragmentach rozszczepienia).



Rozważmy rozszczepienie jądra o energii wzbudzenia  $E^*$ , z wydzieleniem energii kinetycznej  $K$ . Bariera na rozszczepienie wynosi  $E_f$ .



Prawdopodobieństwo rozszczepienia (na jednostkowy przedział energii kinetycznej) :

$$\frac{dP_f(K)}{dK} = \frac{N_s(K)}{N_i} = \frac{\rho_s(E^* - E_f - K) \frac{dn_K}{dK}}{\rho(E^*)} = \frac{\rho_s(E^* - E_f - K) \frac{dpdx}{dK h}}{\rho(E^*)},$$

ale  $dK = \frac{2pdp}{2m} = vdp$ ,  $dx = vdt$ ,

więc prawdopodobieństwo na jednostkę czasu (i na  $dK$ ) :

$$\frac{dW_f(K)}{dK} = \frac{dP_f(K)}{dK dt} = \frac{1}{2\pi \hbar} \frac{\rho_s(E^* - E_f - K)}{\rho(E^*)}.$$

Szerokość ze względu na rozszczepienie jest wtedy :

$$\Gamma_f = \hbar \lambda_f = \hbar \int_0^{E^* - E_f} \frac{dW_f(K)}{dK} dK = \frac{1}{2\pi \rho(E^*)} \int_0^{E^* - E_f} \rho_s(E^* - E_f - K) dK.$$

W analogii do wyrażen na parowanie cząstek mamy więc :

$$\Gamma_f = \frac{1}{2\pi \rho(E^*)} \int_0^{\varepsilon_{\max}} \rho_s(\varepsilon_{\max} - \varepsilon) d\varepsilon, \quad \varepsilon = K, \varepsilon_{\max} = E^* - E_f.$$



Możemy obliczyć  $\Gamma_f$  wstawiając, jak poprzednio, gęstość stanów wg modelu Fermiego :

$$\begin{aligned} \rho(E^*) &= \rho(0) e^{2\sqrt{aE^*}} \\ \int_0^{\varepsilon_{\max}} \rho(\varepsilon_{\max} - \varepsilon) d\varepsilon &= \rho(0) \int_0^{\varepsilon_{\max}} e^{2\sqrt{a\varepsilon_{\max} - \varepsilon}} d\varepsilon \cong \rho(0) e^{2\sqrt{a\varepsilon_{\max}}} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{a}} - \frac{1}{2a} \right) = \\ &\approx \rho(0) \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{a}} e^{2\sqrt{a\varepsilon_{\max}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\max}}{a}} \rho(\varepsilon_{\max}) = T\rho(\varepsilon_{\max}). \end{aligned}$$

Ostatecznie szerokość ze względu na rozszczepienie :

$$\Gamma_f \approx \frac{1}{2\pi \rho(E^*)} \sqrt{\frac{E^* - E_f}{a}} \rho_s(E^* - E_f).$$

W pełnych rachunkach bierze się też pod uwagę poprawki powłokowe, efekty sił pairing a także procesy dyssypacji (lepkość materii jądrowej).

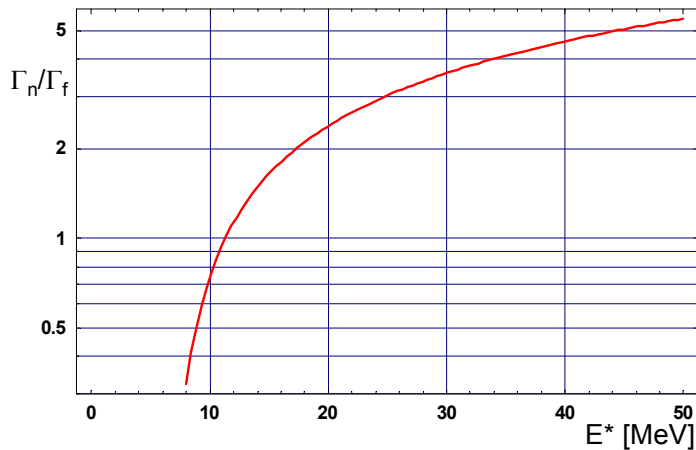


Przykład liczbowy : porównanie  $\Gamma_n$  i  $\Gamma_f$  dla  $^{238}\text{U}$

$$\Gamma_n \approx \frac{1}{2\pi \rho_A(E_A^*)} \frac{4m_n R^2}{\hbar^2} \frac{E_A^* - S_n}{a} \rho_B(E_A^* - S_n),$$

$$\Gamma_f \approx \frac{1}{2\pi \rho(E^*)} \sqrt{\frac{E^* - E_f}{a}} \rho_s(E^* - E_f).$$

Zakładamy :  $\rho(E^*) = \rho(0) e^{2\sqrt{aE^*}}$ ,  $S_n = 6.15 \text{ MeV}$ ,  $E_f = 5.7 \text{ MeV}$ ,  $a = 22 \text{ MeV}^{-1}$



60

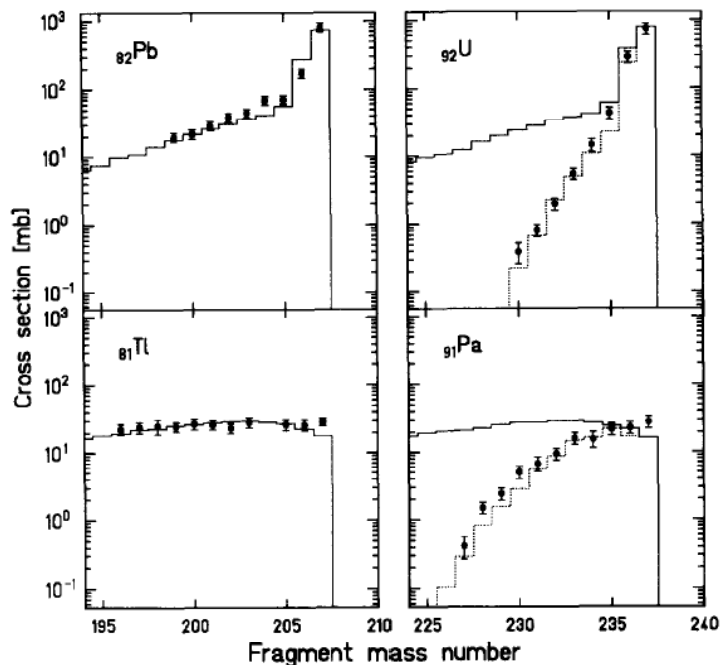
Obserwacje doświadczalne :

Badanie fragmentacji wiązek  $^{208}\text{Pb}$  i  $^{238}\text{U}$  @ 1 A GeV na tarczy Cu.

- Szybki spadek mierzonych przekrojów czynnych na wytworzenie fragmentów uranu !
- Wzbudzone prefragmenty z wiązki uranu ulegają rozszczepieniu ! Włączenie tej możliwości do modelu ABRABLA prowadzi do niezłej zgodności z doświadczeniem.

— AA  
 ..... AA + rozszczepienie

H.-G. Clerc et al./Nuclear Physics A 590 (1995) 785-794



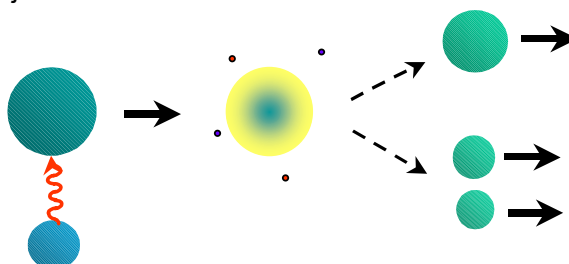
61

# Dysocjacja elektromagnetyczna

Jądro pocisku może utracić nukleony nawet wtedy, gdy przelatuje obok jądra tarczy i nie dochodzi do oddziaływania jądrowego.

→ Wpływ oddziaływania elektromagnetycznego jest szczególnie duży dla tarcz o dużej liczbie  $Z$ .

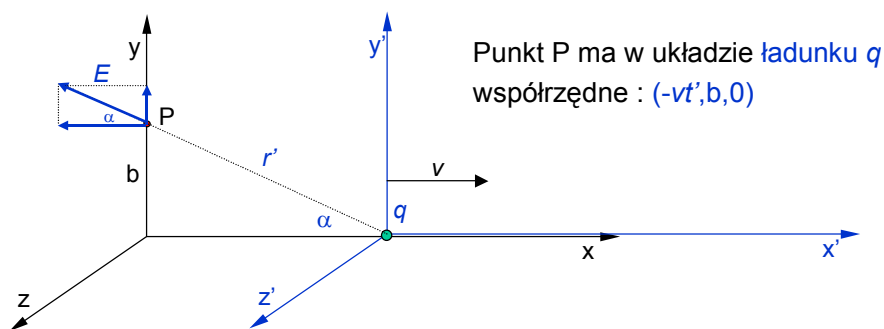
Prosty obraz :



- Pocisk doświadcza szybko zmiennego pola elektrycznego, którego źródłem jest jądro tarczy. Pole to odpowiada strumieniowi wirtualnych fotonów (Weizsäcker, Williams, 1934).
- Pocisk ulega wzbudzeniu wskutek fotoabsorpcji, po czym następuje wyparowanie cząstek, głównie neutronów (lub rozszczepienie).



Rozważmy ładunek  $q$  poruszający się z prędkością  $v$  wzdłuż osi  $x$ .  
Jakie jest pole  $E(t)$  w punkcie  $P(0,b,0)$  ?



Pola E-M w punkcie P w układzie  $q$  :

$$E'_x = E' \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{-vt'}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-qvt'}{[b^2 + (vt')^2]^{3/2}} \quad B'_x = 0$$

$$E'_y = E' \sin \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{b}{r'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qb}{[b^2 + (vt')^2]^{3/2}} \quad B'_y = 0$$

$$E'_z = 0 \quad B'_z = 0$$



## Transformacja Lorentza

→ dla miejsca i czasu :

$$x' = \gamma(x - \beta ct)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$\beta = v/c, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

→ dla pól E i B :

$$E_x = E'_x$$

$$B_x = B'_x$$

$$E_y = \gamma(E'_y + \beta B'_z) \quad B_y = \gamma(B'_y - \beta E'_z)$$

$$E_z = \gamma(E'_z - \beta B'_y) \quad B_z = \gamma(B'_z + \beta E'_y)$$

$$E'_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-qv t'}{[b^2 + (vt')^2]^{3/2}}$$

$$E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qb}{[b^2 + (vt')^2]^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q\gamma v t}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma b}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}$$

czyli dla punktu P(0,b,0) mamy:  $t' = \gamma t$

$$B_z = \beta E_y$$



64

## Analiza jakościowa

$$E_x(t) \propto \frac{-vt}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}} \quad E_y(t) \propto \frac{b}{[b^2 + (\gamma vt)^2]^{3/2}}$$

Szerokość czasowa impulsu  $E_y$ :  $\nu\tau \approx \frac{b}{\gamma}$

Charakterystyczny czas oddziaływania, odpowiada maksymalnej energii wirtualnych fotonów :

$$E_{\gamma \max} = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar\gamma v}{b} = \frac{\hbar c\gamma\beta}{b}$$

$$\hbar c = 197 \text{ MeV fm}$$

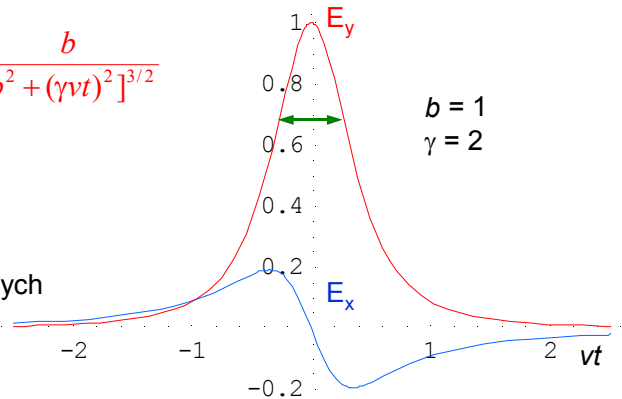
$$E_{\text{kin}} = \gamma mc^2 - mc^2 = A\gamma mc^2(\gamma - 1) \rightarrow \gamma = 1 + \frac{E_{\text{kin}}/A}{uc^2}, \quad \beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2}$$

$$uc^2 = 931.5 \text{ MeV}$$

Przykład : zderzenie Au + Au,  $b = 15 \text{ fm}$  ( $R = 1.2 \cdot 197^{1/3} = 7 \text{ fm}$ )

1)  $E = 5 \text{ A MeV}$ ,  $\gamma \approx 1$ ,  $\beta \approx 0.1 \rightarrow E_{\max} \approx 1 \text{ MeV}$

2)  $E = 1 \text{ A GeV}$ ,  $\gamma \approx 2$ ,  $\beta \approx 0.9 \rightarrow E_{\max} \approx 25 \text{ MeV} \Rightarrow$  zakres rezonansów gigantycznych !



65

Dokładne rachunki :

→ transformata Fouriera  $E(t,b) \Rightarrow E_x(\omega,b), E_y(\omega,b)$

→ energia fali e-m (strumień fotonów) :  $N(\omega,b) \propto |E_x(\omega,b)|^2 + |E_y(\omega,b)|^2$

→ całkowanie po parametrach zderzenia  $b$  :  $N(\omega) = 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} N(\omega,b) b db$

Podstawiając  $E_f = \hbar\omega$  otrzymujemy widmo fotonów wirtualnych :

$$N_\gamma(E_f) = Z^2 \alpha \frac{2}{\pi \beta^2} \frac{1}{E_f} \left[ x K_0(x) K_1(x) - \frac{\beta^2 x^2}{2} (K_1^2(x) - K_0^2(x)) \right], \quad x = \frac{1}{\hbar c} \frac{E_f b_{\min}}{\beta \gamma}.$$

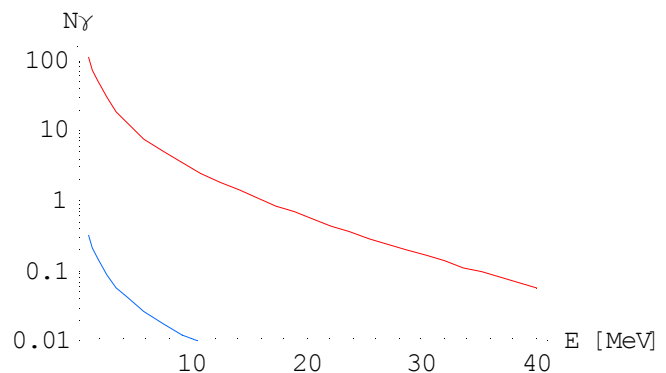
Przykład :

wiązka Au,  $E=1$  A GeV,  $\beta \approx 0.9$ ,  $\gamma \approx 2$

na tarczach :

Au ( $Z=79$ ),  $b = 15$  fm

Be ( $Z=4$ ),  $b = 10$  fm



66

Przekrój czynny na wzbudzenie kulombowskie :

$$\sigma_C = \int N_\gamma(E) \sigma_\gamma(E) dE,$$

gdzie  $\sigma_\gamma(E)$  jest przekrojem czynnym na fotoabsorpcję.

Dla dipolowego rezonansu gigantycznego (GDR) :

$$\sigma_\gamma(E) = \sigma_{E1}(E) \propto \frac{E^2 \Gamma^2}{E^2 \Gamma^2 + (E^2 - E_{\max}^2)^2}$$

Dla rezonansu kwadrupolowego (GQR) :

$$\sigma_\gamma(E) = \sigma_{E2}(E) \propto \frac{E^4 \Gamma^2}{E^2 \Gamma^2 + (E^2 - E_{\max}^2)^2}$$

W pełnej analizie bierze się pod uwagę rezonans dipolowy (w przypadku jąder zdeformowanych dwa !), rezonanse kwadrupolowe (GQR) izoskalarny i izowektorowy, a także możliwość dwu-fotonowego rezonansu dipolowego (DGDR).

Parametry rezonansów : położenie ( $E_{\max}$ ), szerokość ( $\Gamma$ ) i amplitudę oblicza się przy pomocy wzorów empirycznych dopasowanych do danych doświadczalnych.



67

Przykład pełnej i szczegółowej analizy :

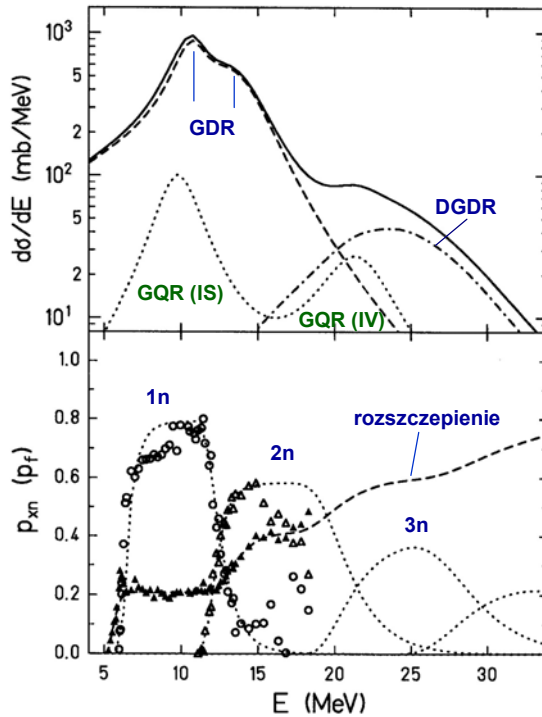
$^{238}\text{U}$  (1 A GeV) na tarczy  $^{208}\text{Pb}$

→ Prawdopodobieństwo wzbudzenia kulombowskiego :  $N_\gamma(E)\sigma_\gamma(E)$  →

→ Prawdopodobieństwo emisji neutronów i rozszczepienia z jądra wzbudzonego →

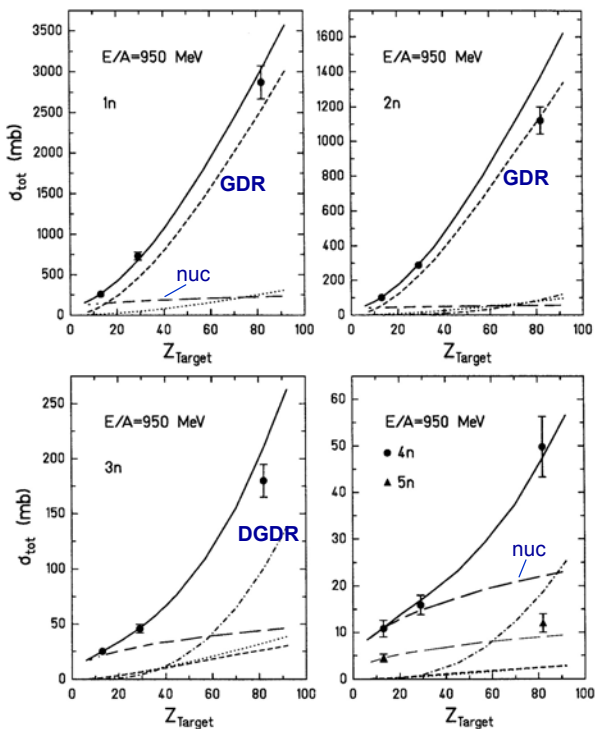
Ostatecznie, przekrój czynny na powstanie określonego stanu końcowego:

$$\sigma_{ED,xn(f)} = \int N_\gamma(E)\sigma_\gamma(E)p_{xn(f)}dE$$



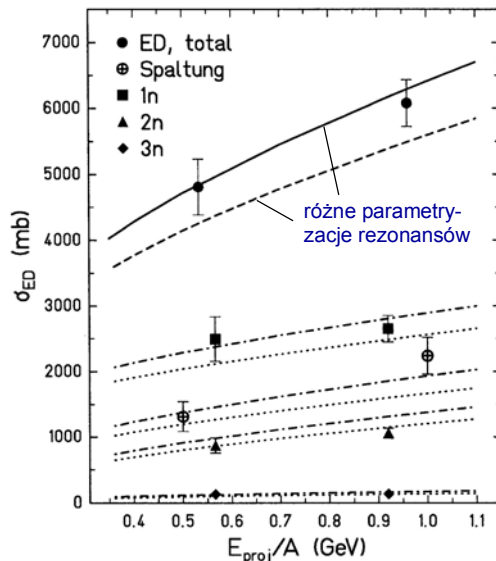
T.Aumann, Ph.D., Mainz 1994

Zależność  $\sigma_{tot,xn}$  od tarczy dla wiązki  $^{238}\text{U}$



T.Aumann, Ph.D., Mainz 1994

Całkowity przekrój na procesy ED wiązki  $^{238}\text{U}$  na tarczy  $^{208}\text{Pb}$



# Wymiana ładunku ( $\Delta Z=+1$ )

Wśród produktów reakcji obserwuje się nuklidy o liczbie  $Z > Z_p$  (**charge pick-up**).

Dominują reakcje z  $\Delta Z=+1$ . Przy niższych energiach ( $\approx 50$  A MeV) identyfikowano  $\Delta Z=+2$ .

Przykład :

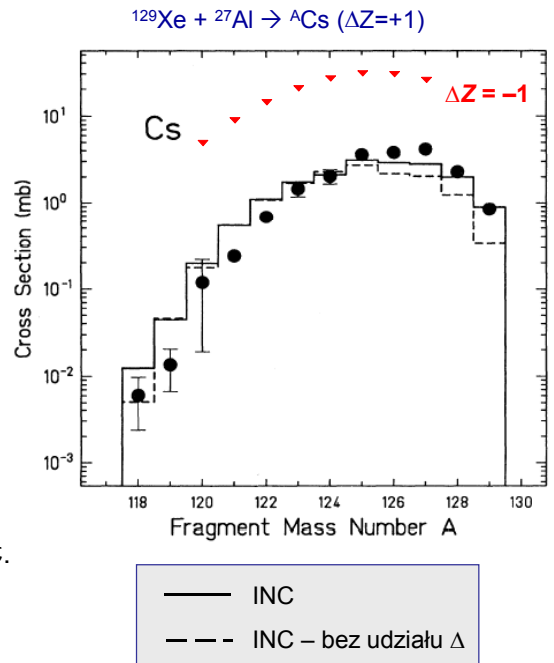


Sümmerer i in. PRC 52 (1995) 1106

Przekroje na proces  $\Delta Z=+1$  są dużo mniejsze niż dla  $\Delta Z=-1 \Rightarrow$  przewidywania modelu EPAX dla izotopów jodu będących izotonami Cs

Reakcji wymiany ładunku nie da się opisać w modelu, w którym tylko usuwa się nukleony z pocisku. Proces taki jest możliwy w modelu INC.

$\rightarrow$  Tworzenie rezonansów  $\Delta$  wnosi istotny wkład



70

**Całkowity przekrój na wymianę  $\Delta Z=+1$**  (suma po wszystkich izotopach) rośnie z masą pocisku.

Wzór empiryczny :

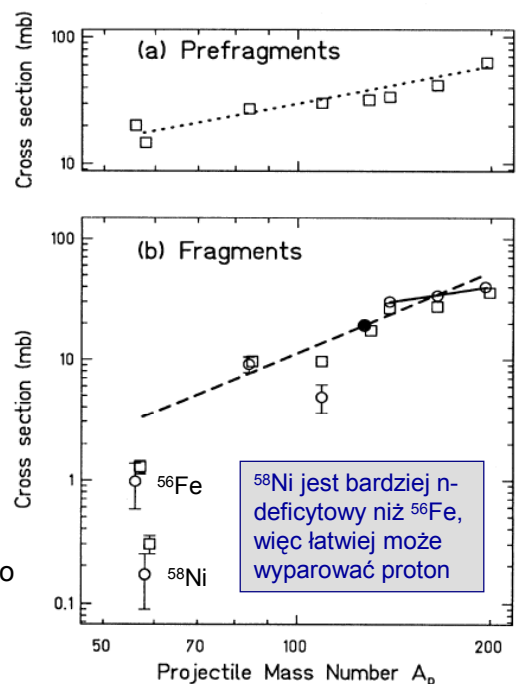
$$\sigma_{\Delta Z=+1} = 1.7 \cdot 10^{-4} \gamma_{pt} A_p^2 \text{ mb},$$

$$\gamma_{pt} = A_p^{1/3} + A_t^{1/3} - 1.$$

Guoxiao i in. PRC 39 (1989) 1351.

- eksp. izotopy Cs
- eksp. dane literaturowe
- model INC
- - - Guoxiao

Znaczny wpływ  $N/Z$  pocisku na prawdopodobieństwo parowania protonów  $\Rightarrow$  odstępstwa od prostego trendu empirycznego.



Sümmerer i in. PRC 52 (1995) 1106



71

**Podsumowanie :**

zmierzone przekroje czynne na produkcję nuklidów w reakcjach z relatywistycznymi ciężkimi jonami

→ Fragmentacja (korytarz ewaporacyjny)

→ Rozszczepienie po wzbudzeniu jądrowym

→ Rozszczepienie po wzbudzeniu e-m

Enqvist et al.,  
NPA 686 (2001) 481  
NPA 658 (1999) 47

