Rozdział 3

Wiązka wtórna i jej własności

- Dotychczas rozważaliśmy procesy reakcji jakie zachodzą między jądrem pocisku o dużej energii a jądrem tarczy. Omawialiśmy modele tych procesów pozwalające wyjaśnić/przewidzieć przekroje czynne na wytworzenie fragmentów pocisku.
- Zanim przejdziemy do omawiania transportu i selekcji wybranych produktów w separatorze magnetycznym musimy poznać kinematyczne własności wiązki produktów i wpływ jaki ma na nie materiał tarczy.

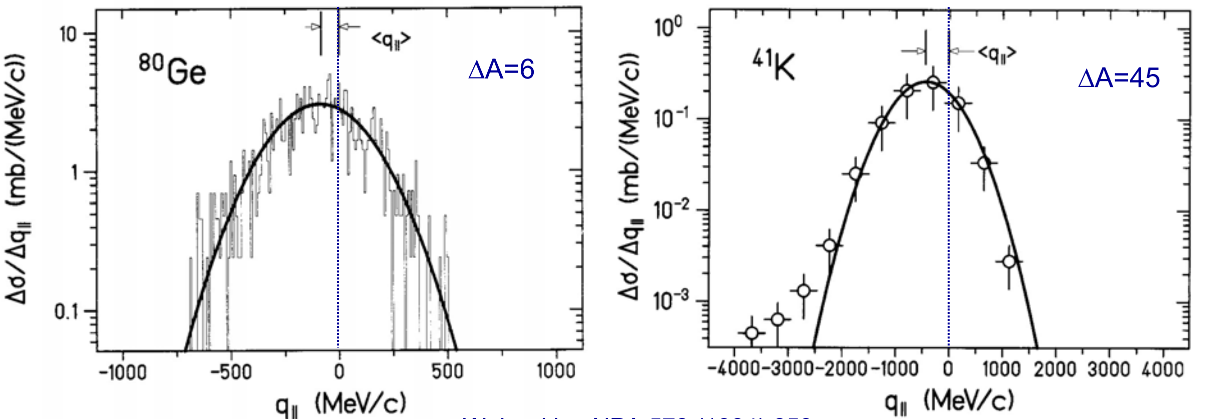
Bierzemy pod uwagę :

- Rozkład pędu produktów :
  - kinematyka reakcji fragmentacji,
  - kinematyka rozszczepienia,
  - straty energii w materiale tarczy,
  - rozrzut strat energii (straggling),
- Rozkład kątowy produktów.
- Stany ładunkowe.
- Reakcje wtórne.
- Wybór materiału i grubości tarczy.

Kinematyka reakcji – rozkład pędu

Produkt reakcji fragmentacji (fragment pocisku) ma średnią prędkość w przybliżeniu równą prędkości pocisku. Pęd fragmentu ma jednak pewien rozkład, który w jego układzie własnym jest izotropowy i z dobrą dokładnością gaussowski.

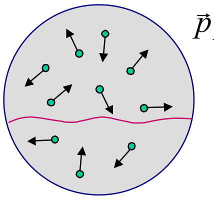
Przykład : reakcja ^{86}Kr @ 500 A MeV + ^{9}Be
rozkłady pędu podłużnego w układzie spoczynkowym pocisku



Weber i in., NPA 578 (1994) 659

Statystyczny model rozkładu pędu fragmentów :
Goldhaber PLB 53 (1974) 306.

A nukleonów

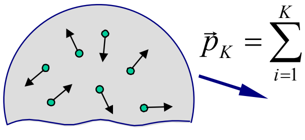


$$\vec{p}_A = \sum_{i=1}^{A} \vec{p}_i = 0$$

➔ Rozważamy pocisk – *A* nukleonów w obrazie Fermiego – w jego układzie własnym. W tym układzie pęd pocisku jest równy 0.

➔ W wyniku reakcji losowo usuwamy nukleony z pocisku. Powstały fragment ma *K* nukleonów i pęd $\boldsymbol{p}_K$ różny od 0. Ponieważ nie ma wyróżnionego kierunku (izotropowość), wartość średnia tego pędu jest równa 0.

K nukleonów



$$\vec{p}_K = \sum_{i=1}^{K} \vec{p}_i \neq 0$$

Izotropowość ⇨ $\langle \vec{p}_K \rangle = 0$

➔ Wartość średnia kwadratu pędu $\boldsymbol{p}_K$ jest jednak różna od zera i można na jej podstawie obliczyć wariancję rozkładu pędu.

Kwadrat wariancji rozkładu pędu :

$$\left\langle \vec{p}_K^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{K} \vec{p}_i \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{K} p_i^2 + \sum_{i \neq j} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{K} p_i^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i \neq j} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \right\rangle =$$

$$= K \left\langle p^2 \right\rangle + K(K-1) \left\langle \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \right\rangle .$$

Analogicznie, dla pocisku przed reakcją :

$$0 = \left\langle \vec{p}_A^2 \right\rangle = \left\langle \left(\sum_{i=1}^{A} \vec{p}_i \right)^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{A} p_i^2 + \sum_{i \neq j} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{A} p_i^2 \right\rangle + \left\langle \sum_{i \neq j} \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \right\rangle =$$

$$= A \left\langle p^2 \right\rangle + A(A-1) \left\langle \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \right\rangle \;\Rightarrow\; \left\langle \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j \right\rangle = \frac{-1}{A-1} \left\langle p^2 \right\rangle .$$

Łącząc oba wzory otrzymujemy :

$$\left\langle \vec{p}_K^2 \right\rangle = K \left\langle p^2 \right\rangle + K(K-1) \frac{-1}{A-1} \left\langle p^2 \right\rangle = \left\langle p^2 \right\rangle K \left(1 - \frac{K-1}{A-1} \right) = \left\langle p^2 \right\rangle K \frac{A-K}{A-1} ,$$

gdzie $\left\langle p^2 \right\rangle$ jest średnią kwadratu pędu nukleonu. Można ją obliczyć w modelu Fermiego :

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{\int_0^{p_F} p^2 d^3 p}{\int_0^{p_F} d^3 p} = \frac{4\pi \int_0^{p_F} p^4 dp}{4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{\frac{p_F^5}{5}}{\frac{p_F^3}{3}} = \frac{3}{5} p_F^2 .$$

Wariancja rozkładu jednej składowej pędu (np. podłużnej lub poprzecznej) :

$$\sigma_{\parallel}^2 = \sigma_{\perp}^2 = \frac{1}{3} \left\langle \vec{p}_K^2 \right\rangle = \frac{p_F^2}{5} \frac{K(A-K)}{A-1} ,$$

➔ Ostatecznie : $\sigma_{\parallel} = \frac{p_F}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{K(A-K)}{A-1}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{K(A-K)}{A-1}} = \sigma_0 \sqrt{\frac{(A-\Delta A)\Delta A}{A-1}}$.

Szacowaliśmy poprzednio, że $p_F = 250\,\mathrm{MeV/c} \;\Rightarrow\; \frac{p_F}{\sqrt{5}} = 112\,\mathrm{MeV/c}$.

➔ Zaniedbaliśmy wpływ drugiego etapu reakcji (parowanie cząstek) na rozkład pędu ! Jednak wzór Goldhabera nieźle opisuje dane doświadczalne, jeśli $\sigma_0 = 90\,\mathrm{MeV/c}$.

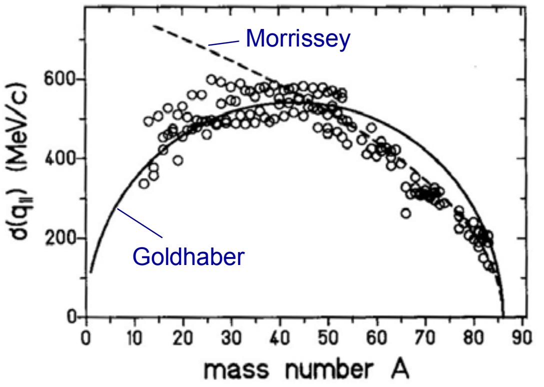
Inne podejście (fenomenologiczne) do rozkładu pędu :
parametryzacja danych doświadczalnych (Morrissey PRC 39 (1989) 460).

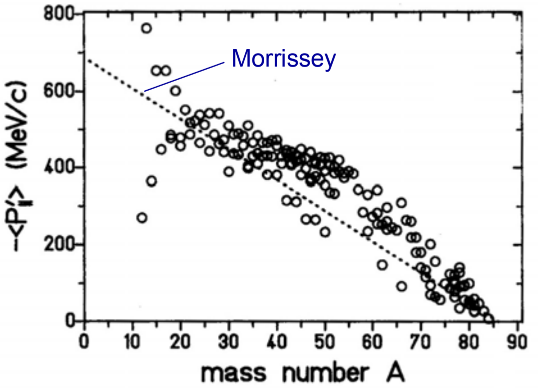
W układzie pocisku :

➔ Wariancja pędu podłużnego : $\sigma_{\parallel} = 87\sqrt{\Delta A}\ \mathrm{MeV/c}$

➔ Średnia „prędkość" : $\langle P'_{\parallel}\rangle \equiv \langle \beta'_{\parallel}\rangle \dfrac{\gamma\beta}{\gamma+1} A_p uc = -8\cdot\Delta A\ \mathrm{MeV/c}$

Przykładowe wyniki z reakcji ^{86}Kr @ 500 A MeV + ^{9}Be :



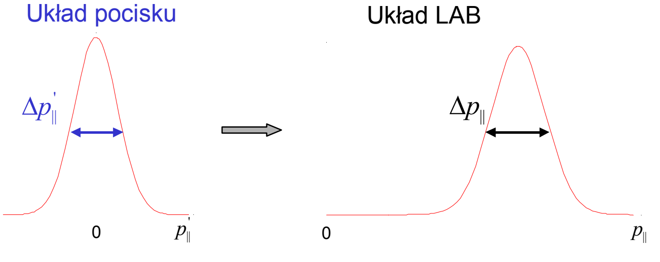


Weber i in., NPA 578 (1994) 659

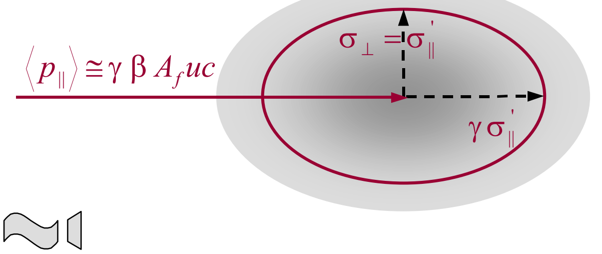
Przejście do układu LABoratoryjnego :

➔ Transformacja Lorentza dla energii i pędu :
(β i γ odnoszą się do pocisku)

$$E = \gamma\,(E' + \beta\, cp'_{\parallel})$$
$$cp_{\parallel} = \gamma\,(cp'_{\parallel} + \beta\, E')$$
$$p_{\perp} = p'_{\perp}$$



$$\Delta(cp_{\parallel}) = \gamma\,\Delta(cp'_{\parallel}) + \gamma\beta\,\Delta E' = \gamma\,\Delta(cp'_{\parallel}) \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\parallel}^{LAB} = \gamma\,\sigma'_{\parallel} \qquad \Delta p(\mathrm{FWHM}) = 2.35\sigma$$
$$\sigma_{\perp}^{LAB} = \sigma'_{\perp}$$



Przykład liczbowy :

$^{112}Sn + T \rightarrow {}^{100}Sn$, czyli ΔA = 12

Model Goldhabera :

$$\sigma_{\parallel}^{'} = \sigma_0 \sqrt{\frac{(A-\Delta A)\Delta A}{A-1}} = 90\sqrt{\frac{(112-12)12}{112-1}}\ \mathrm{MeV/c} = 296\ \mathrm{MeV/c}\ .$$

Systematyka Morrissey'a :

$$\sigma_{\parallel}^{'} = 87\sqrt{\Delta A}\ \mathrm{MeV/c} = 87\sqrt{12} = 301\,\mathrm{MeV/c}\ .$$

→ Energia pocisku = 1000 *A* MeV (FRS)

$$\gamma = 1 + \frac{E_{kin}/A}{uc^2} = 1 + \frac{1000}{931.5} = 2.07\ ,\quad \beta = \sqrt{1-1/\gamma^2} = 0.876\,,$$

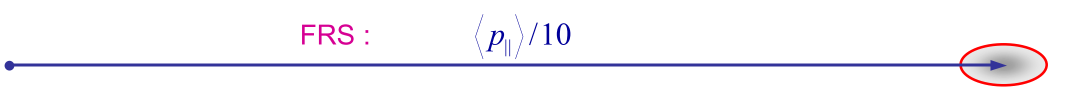
$$\langle p_{\parallel}\rangle \cong \gamma\,\beta\,A_f uc = 2.07\cdot 0.876\cdot 100\cdot 931.5\,\mathrm{MeV/c} = 169\,\mathrm{GeV/c}\ ,$$

$$\sigma_{\parallel}^{LAB} = \gamma\,\sigma_{\parallel}^{'} = 2.07\cdot 300\,\mathrm{MeV/c} = 621\,\mathrm{MeV/c}\ \Rightarrow \Delta p_{\parallel}(\mathrm{FWHM}) = 1460\,\mathrm{MeV/c}\ ,$$

$$\sigma_{\perp}^{LAB} = \sigma_{\perp}^{'} = 300\,\mathrm{MeV/c}\ \Rightarrow\ \Delta p_{\perp} = 705\,\mathrm{MeV/c}\ ,$$

czyli

$$\frac{\Delta p_{\parallel}}{\langle p_{\parallel}\rangle} = \frac{1.46}{169} = 8.6\cdot 10^{-3} = 0.86\%\,,\quad \Delta\theta = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{0.7}{169} = 4.1\cdot 10^{-3} = 4.1\,\mathrm{mrad} = 0.24^{\circ}.$$



→ Energia pocisku = 70 *A* MeV (LISE)

$$\gamma = 1 + \frac{E_{kin}/A}{uc^2} = 1 + \frac{70}{931.5} = 1.075\,,\quad \beta = \sqrt{1-1/\gamma^2} = 0.367\,,$$

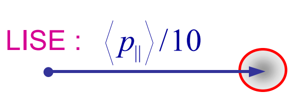
$$\langle p_{\parallel}\rangle \cong \gamma\,\beta\,A_f uc = 1.075\cdot 0.367\cdot 100\cdot 931.5\,\mathrm{MeV/c} = 36.8\,\mathrm{GeV/c}\ ,$$

$$\sigma_{\parallel}^{LAB} = \gamma\,\sigma_{\parallel}^{'} = 1.075\cdot 300\,\mathrm{MeV/c} = 323\,\mathrm{MeV/c}\ \Rightarrow \Delta p_{\parallel}(\mathrm{FWHM}) = 760\,\mathrm{MeV/c}\ ,$$

$$\sigma_{\perp}^{LAB} = \sigma_{\perp}^{'} = 300\,\mathrm{MeV/c}\ \Rightarrow\ \Delta p_{\perp} = 705\,\mathrm{MeV/c}\ ,$$

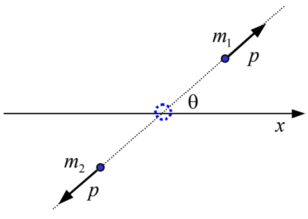
czyli

$$\frac{\Delta p_{\parallel}}{\langle p_{\parallel}\rangle} = \frac{0.76}{36.8} = 2.1\cdot 10^{-2} = 2.1\%\,,\quad \Delta\theta = \frac{\Delta p_{\perp}}{p} = \frac{0.7}{36.8} = 1.9\cdot 10^{-2} = 19\,\mathrm{mrad} = 1.1^{\circ}\ .$$



Kinematyka rozszczepienia

Rozważmy kinematykę dwuciałowego rozszczepienia, w którym wydziela się energia *Q*. Początkowe jądro o masie m_1+m_2 spoczywa.



$$Q = E_{k1} + E_{k2} = \frac{p^2}{2m_1} + \frac{p^2}{2m_2} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2Q\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}} \; .$$

$$E_{k1} = Q\frac{m_2}{m_1+m_2}\,, \qquad E_{k2} = Q\frac{m_1}{m_1+m_2}\; .$$

Przechodzimy teraz do układu, w którym rozszczepiające się jądro porusza się z prędkością relatywistyczną wzdłuż osi *x*.

W układzie własnym (CM) :

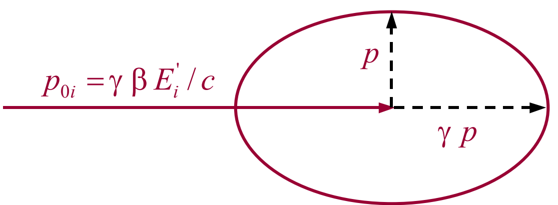
$$p'_{1\parallel} = p\cos\theta\;; \qquad p'_{2\parallel} = -p\cos\theta\;;$$
$$p'_{1\perp} = p\sin\theta\;; \qquad p'_{2\perp} = -p\sin\theta\;;$$
$$E'_1 = m_1c^2 + E_{k1}\;; \quad E'_2 = m_2c^2 + E_{k2}\;.$$

$\Rightarrow$

W układzie LAB :

$$p_{1\parallel} = \gamma\, p\cos\theta + \gamma\beta\, E'_1/c\;;$$
$$p_{1\perp} = p\sin\theta\;;$$
$$p_{2\parallel} = -\gamma\, p\cos\theta + \gamma\beta\, E'_2/c\;;$$
$$p_{2\perp} = -p\sin\theta\;\; .$$

W układzie LAB końce wektorów pędu układają się na elipsach :



Przykład liczbowy :

^{238}U @ 750 A MeV → ^{132}Sn + ^{106}Mo + 200 MeV

$$p = \sqrt{2Q\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}} = \sqrt{2\cdot 200\frac{132\cdot 106}{238}931.5\text{ MeV/c}} = 4680\text{ MeV/c}\;.$$

$$E'_{k1} = Q\frac{m_2}{m_1+m_2} = 200\frac{106}{238}\text{MeV} = 89\text{ MeV},\quad E'_1 = (132\cdot 931.5 + 89)\text{ MeV} = 123047\text{ MeV},$$

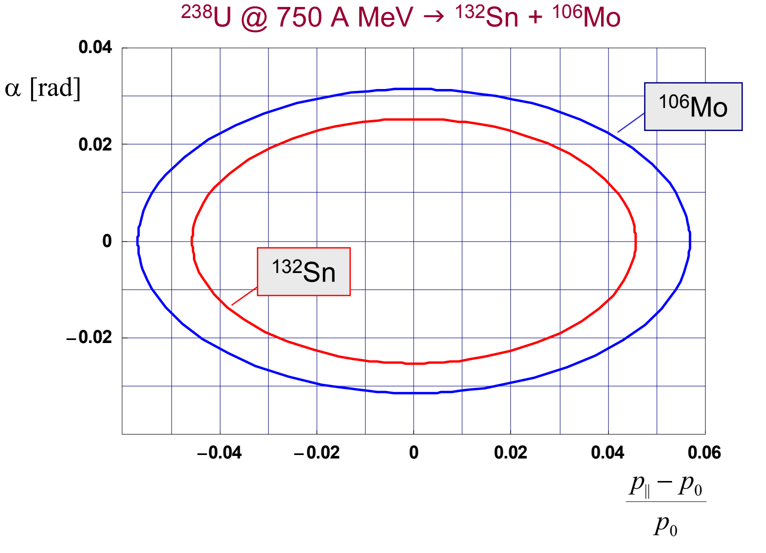
$$E'_{k2} = Q\frac{m_1}{m_1+m_2} = 200\frac{132}{238}\text{MeV} = 111\text{ MeV},\quad E'_2 = (106\cdot 931.5 + 111)\text{ MeV} = 98850\text{ MeV}.$$

$$\gamma = 1 + \frac{E_{kin}/A}{uc^2} = 1 + \frac{750}{931.5} = 1.805\,,\quad \beta = \sqrt{1 - 1/\gamma^2} = 0.833\,,$$

$$p_{01} = 1.805\cdot 0.833\cdot 123047\text{ MeV/c} = 185009\text{ MeV/c}\,,$$
$$p_{02} = 1.805\cdot 0.833\cdot 98850\text{ MeV/c} = 148627\text{ MeV/c}\;.$$

Rozkład pędu podłużnego : $\dfrac{\Delta p_{\parallel}}{p_0} = \dfrac{p_{\parallel} - p_0}{p_0} \cong \pm 5\,\%\,.$

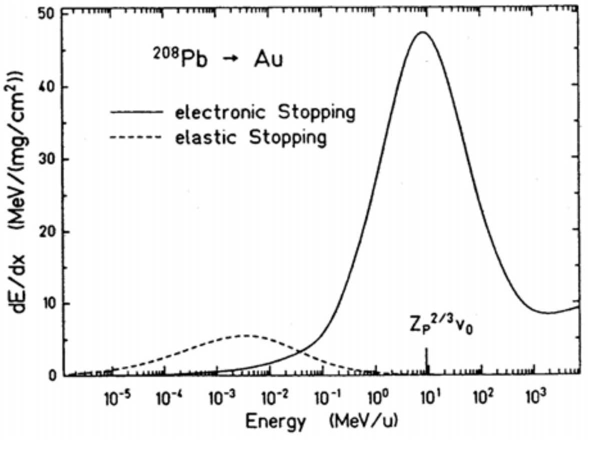
Rozkład kątowy : $\alpha = \dfrac{p_{\perp}}{p_0} \cong \pm 30\,\mathrm{mrad} = \pm 1.7\,°\,.$



Straty energii jonów w materii

Wszystkie cząstki naładowane przechodząc przez materię tracą energię. Zjawisko to odgrywa ważną rolę w procesie separacji produktów reakcji. Zmienia np. rozkład energii (pędu) cząstek wychodzących z tarczy.

➔ Straty energii jonu na jednostkę długości toru



Parametr krytyczny :

$\upsilon_g / c = Z_p^{2/3} \upsilon_0 / c = Z_p^{2/3} \alpha$

Z	υ_g / c	E_k [A MeV]
10	0.03	0.4
50	0.10	4.7
82	0.14	9.3

Trzy zakresy prędkości :

$\upsilon < \upsilon_g$

$\upsilon \approx \upsilon_g$

$\upsilon > \upsilon_g$

▶ Małe prędkości : $(\upsilon < \upsilon_g)$ $\quad \dfrac{dE}{dx} \propto \dfrac{Z_p^{7/6} Z_T}{\left(Z_p^{2/3} + Z_T^{2/3}\right)^{3/2}} \dfrac{\upsilon}{\upsilon_g}.$

▶ Średnie prędkości : $(\upsilon \approx \upsilon_g)$ $\quad \dfrac{dE}{dx}(Z_p, \upsilon) = Z_{eff}^2 \dfrac{dE}{dx}(Z_p = 1, \upsilon),$

$$Z_{eff} = Z_p^{1/3} \frac{\upsilon}{\upsilon_0},$$ dane doświadczalne dla protonów

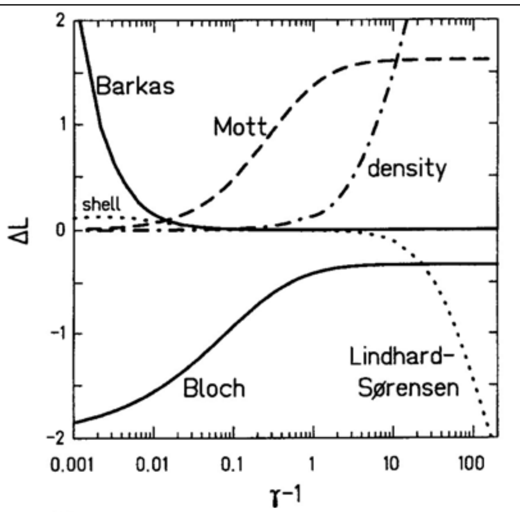
▶ Duże prędkości : $(\upsilon > \upsilon_g)$ $\quad \dfrac{dE}{dx} = \dfrac{4\pi N_T e^4}{m_e c^2} \dfrac{Z_p^2 Z_T}{\beta^2} L,$

$N_T = N_A \rho_T / A_T$ – gęstość atomów tarczy, β – prędkość pocisku /c,

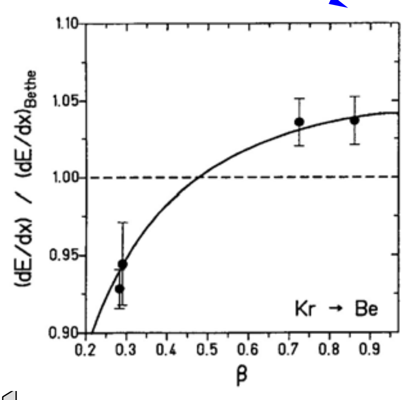
$$L = \Big[\underbrace{\ln\left(\frac{2 m_e c^2 \beta^2}{I(1-\beta^2)}\right) - \beta^2}_{\text{Bethe}} + \Delta L_{\text{Bloch}} + \Delta L_{\text{Mott}} + \Delta L_{\text{LS}} + \Delta L_{\text{shell}} + \Delta L_{\text{density}} \Big] J_{\text{Barkas}}$$

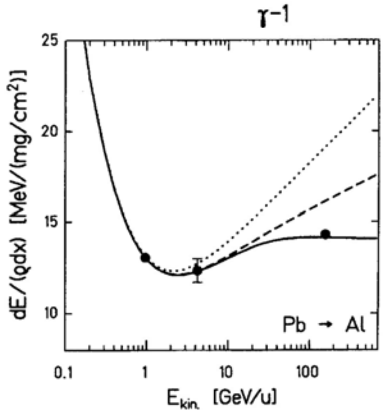
Bethe + poprawki

→ Poprawki do wzoru Bethego – Blocha :
Scheidenberger & Geissel, NIMB 135 (1998) 25.



Porównanie teoretycznych strat energii z wynikami pomiarów :





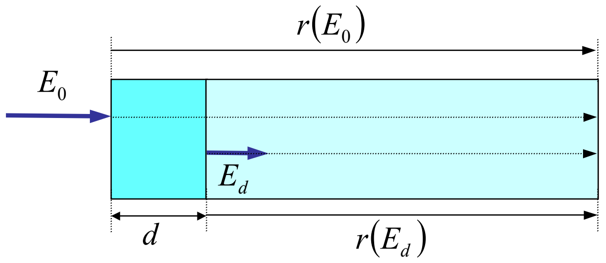
no density, no LS

$-\Delta L_{\text{density}}$

$-\Delta L_{\text{density}} + \Delta L_{\text{LS}}$

Średni zasięg jonów o początkowej energii kinetycznej E_0 w materii :

$$r(E_0) = \int_0^{E_0} \frac{dE}{(dE/dx)} \ .$$



Możemy napisać :

$$r(E_d) = r(E_0) - d \ ,$$

$$E_d = r^{-1}(r(E_0) - d).$$

Jest to praktyczny sposób na obliczanie energii po przejściu przez absorbent, ponieważ zasięgi dają się stosunkowo łatwo parametryzować.

→ Przykład przybliżonej i bardzo prostej parametryzacji :
(E.Hanelt, Ph.D, TH Darmstadt, 1991)

$$r = k \frac{A}{Z^2} \left(\frac{p}{mc} \right)^{\lambda} ,$$

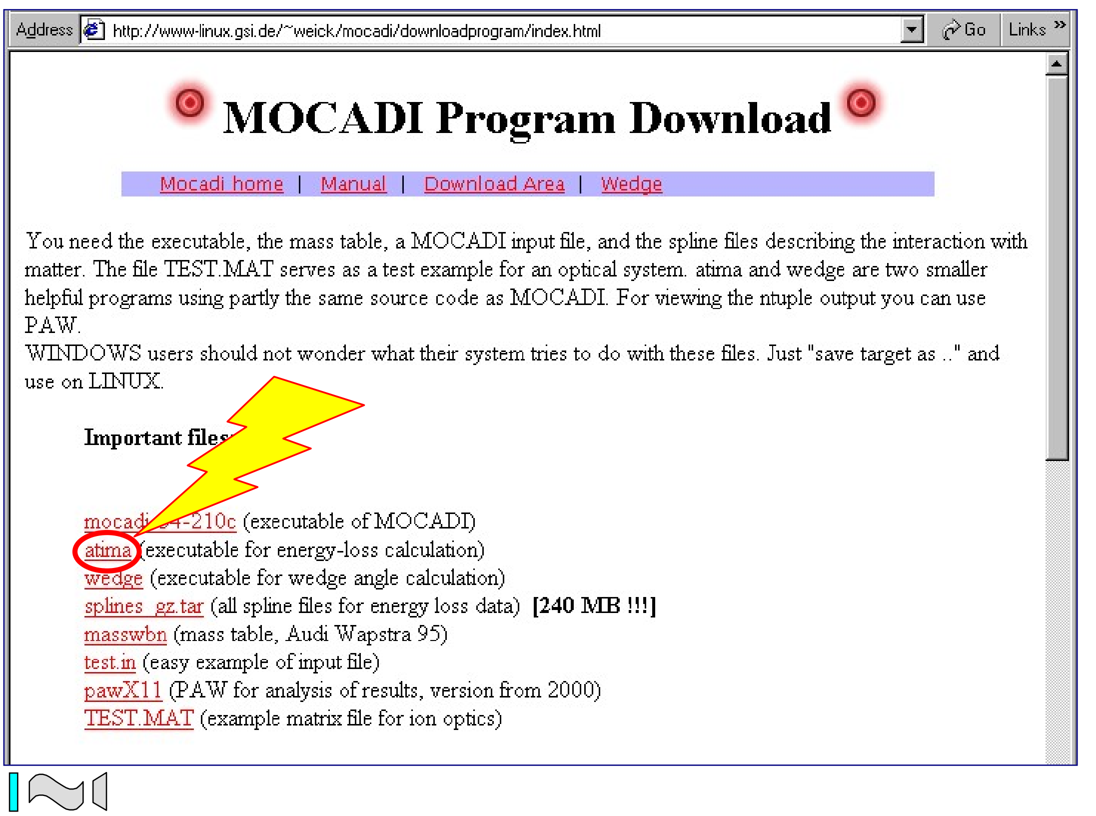
$$k = k_0 \frac{A_d}{Z_d}, \ \lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \frac{E}{A}, \ \frac{p}{mc} = \beta\gamma \ ,$$

$$k_0 = 42.3 + 0.22\, Z_d \ \ [\mathrm{g/cm^2}],$$

$$\lambda_0 = 2.88 - 1.38 \cdot 10^{-3}\, Z_d \ ,$$

$$\lambda_1 = -4.62 \cdot 10^{-4} + 3.81 \cdot 10^{-7}\, Z_d \ [\mathrm{A\,MeV}].$$

→ Pełne i zaawansowane rachunki strat energii : program ATIMA


Address http://www-linux.gsi.de/~weick/mocadi/downloadprogram/index.html Go Links

MOCADI Program Download

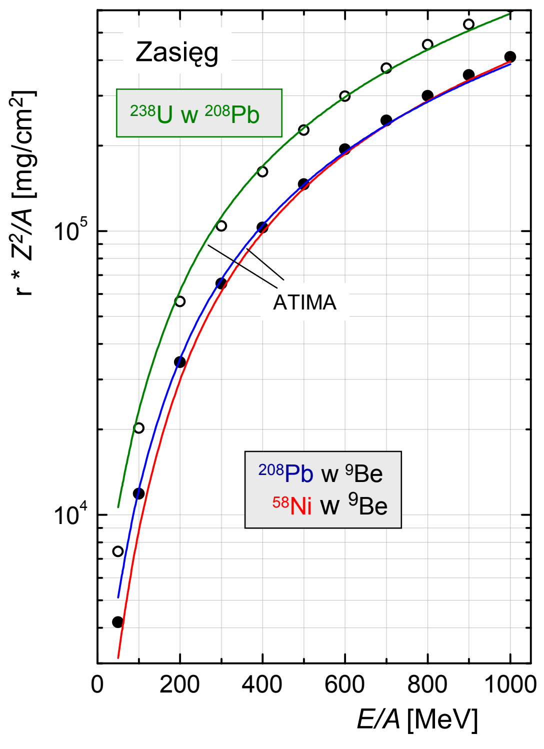
Mocadi home | Manual | Download Area | Wedge

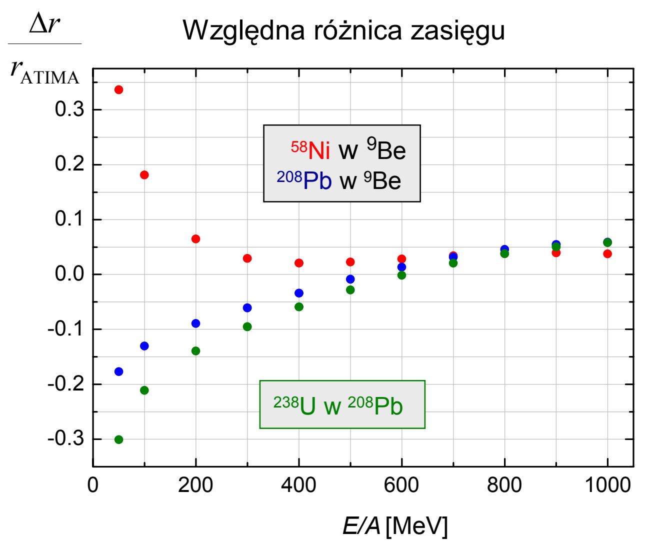
You need the executable, the mass table, a MOCADI input file, and the spline files describing the interaction with matter. The file TEST.MAT serves as a test example for an optical system. atima and wedge are two smaller helpful programs using partly the same source code as MOCADI. For viewing the ntuple output you can use PAW.
WINDOWS users should not wonder what their system tries to do with these files. Just "save target as .." and use on LINUX.

Important files:

mocadi-34-210c (executable of MOCADI)
atima (executable for energy-loss calculation)
wedge (executable for wedge angle calculation)
splines_gz.tar (all spline files for energy loss data) **[240 MB !!!]**
masswbn (mass table, Audi Wapstra 95)
test.in (easy example of input file)
pawX11 (PAW for analysis of results, version from 2000)
TEST.MAT (example matrix file for ion optics)

Porównanie wzoru przybliżonego (Hanelt) z pełnymi rachunkami (ATIMA)





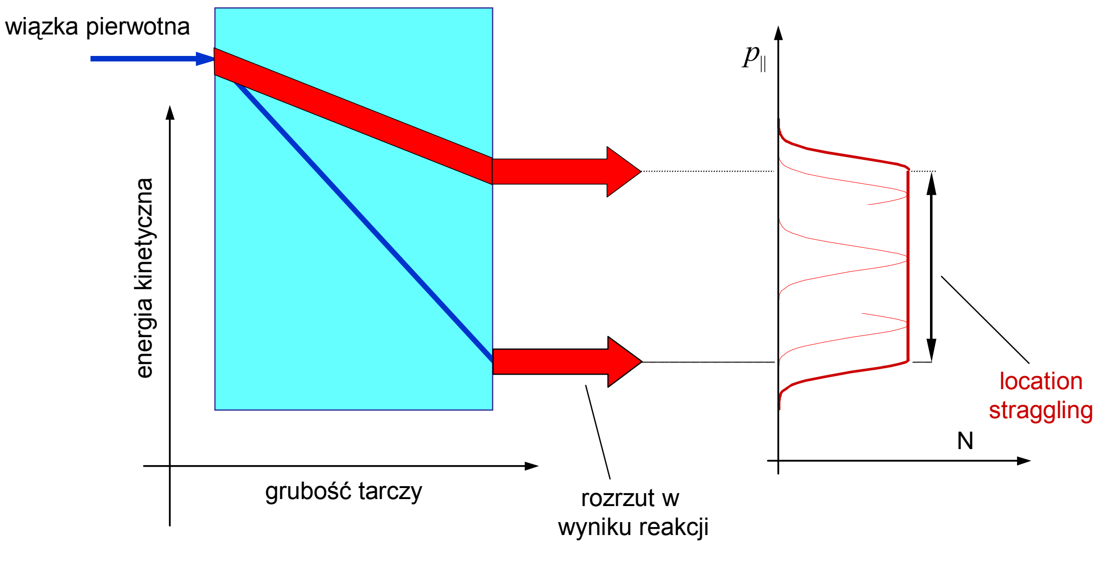
→ Wpływ grubości tarczy na rozkład pędu produktów reakcji.

Produkty o $Z < Z_p$ doznają mniejszych strat energii od pocisku.

A) wiązka przechodzi prze tarczę bez reakcji

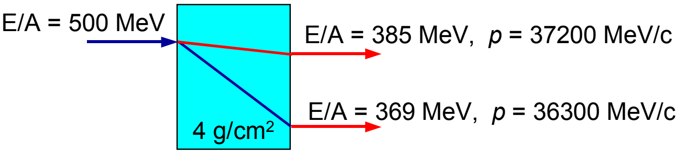
B) reakcja zachodzi przy końcu tarczy

C) reakcja zachodzi na początku tarczy



Przykład 1 :

^{58}Ni @ 500 A MeV + ^{9}Be (4g/cm^2) → ^{40}Ti

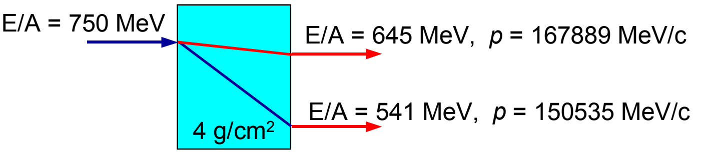


$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\langle p \rangle} = \frac{900}{36750} = 2.4\%$$

Kinematyka reakcji : $\Delta p_{\parallel} = 2.35 \cdot 1.535 \cdot 87 \sqrt{18} = 1331\,\mathrm{MeV/c} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\langle p \rangle} = \frac{1331}{36750} = 3.6\%$

Przykład 2 :

^{238}U @ 750 A MeV + ^{208}Pb (4g/cm^2) → ^{132}Sn



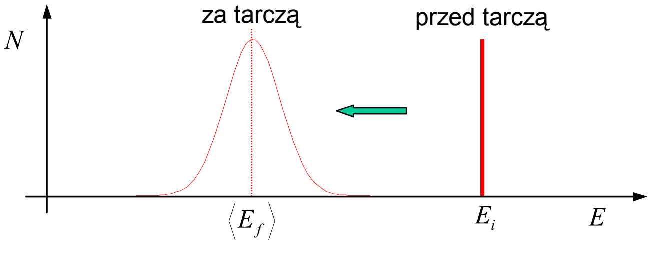
$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\langle p \rangle} = \frac{17354}{159212} = 11\%$$

Kinematyka reakcji : $\Rightarrow \frac{\Delta p}{\langle p \rangle} \approx 10\%$

Rozrzut strat energii

Energy loss straggling

Strata energii jonu jest wynikiem bardzo wielu oddziaływań, ma więc charakter statystyczny i opisana jest przez pewien rozkład.



Relatywistyczna formuła Bohra :

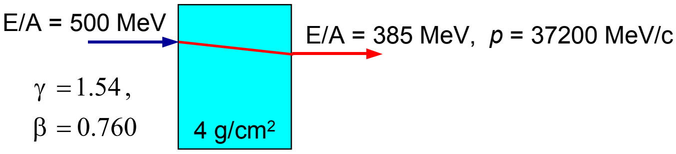
$$\sigma^2_{\mathrm{Bohr}}(E) = 0.157\, Z_p^2 \frac{Z_d}{A_d} \frac{1-\beta^2/2}{1-\beta^2} \frac{d}{\mathrm{g/cm}^2}\,\mathrm{MeV}^2$$

Poprawka fenomenologiczna dla grubych degraderów :

$$\sigma_{\mathrm{strag}}(E/A) = \frac{1}{A_p}\sqrt{\sigma^2_{\mathrm{Bohr}}\, Q}\,, \quad Q = 0.985\left(\frac{E_i}{E_f}\right)^{2/3} .$$

Przykład 1 :

^{58}Ni @ 500 A MeV + ^{9}Be (4g/cm^2) → ^{40}Ti



$$\sigma^2_{\mathrm{Bohr}}(E) = 0.157\, 28^2\, \frac{4}{9}\frac{1-\beta^2/2}{1-\beta^2}\, 4\,\mathrm{MeV}^2 = 368\,\mathrm{MeV}^2\,,\quad Q = 0.985\left(\frac{500}{385}\right)^{2/3} = 1.172\,,$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_{\mathrm{strag}}(E/A) = \frac{1}{40}\sqrt{368\cdot 1.172}\ \mathrm{MeV} = 0.52\,\mathrm{MeV}$$

Ćwiczenie : zamienić szerokość rozkładu energii kinetycznej na nukleon na szerokość rozkładu pędu.

$$E^2 = \left(mc^2\right)^2 + (cp)^2 = \left(E_k + mc^2\right)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2 + \left(mc^2\right)^2,$$

$$(cp)^2 = E_k^2 + 2E_k mc^2 \quad\Rightarrow\quad 2(cp)\,d(cp) = 2\left(E_k + mc^2\right)dE_k = 2E\,dE_k\,,$$

$$d(cp) = \frac{E}{cp}dE_k = \frac{1}{\beta}dE_k = \frac{A}{\beta}\frac{dE_k}{A} = \frac{A}{\beta}d\left(E_k/A\right).$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_{\mathrm{strag}}(p) = \frac{40}{0.760}0.52 \cong 27\ \mathrm{MeV/c} \qquad \frac{\Delta p_{\mathrm{strag}}}{p} = \frac{2.35\cdot 27}{37200} = 1.7\cdot 10^{-3} = 0.17\%$$

Rozkład kątowy

Wskutek wielokrotnych rozproszeń kulombowskich na jądrach tarczy początkowo równoległa wiązka jonów opuszcza tarczę z pewnym rozkładem kątowym.

Dla małych kątów rozproszeń rozkład ten jest z dobrym przybliżeniem gaussowski (dla dużych kątów opisuje go rozkład Rutherforda, który maleje wolniej niż funkcja Gaussa).

→ Dla cząstek relatywistycznych o liczbie atomowej Z wariancja rozkładu wynosi (PDG, RMP 56 (1984)) :

$$\sigma(\Theta) = \frac{14.1\,\mathrm{MeV/c}}{\langle p\beta\rangle} Z\sqrt{\frac{d}{L_r}}\left(1 + \frac{1}{9}\log_{10}\frac{d}{L_r}\right)\ \mathrm{rad},$$

gdzie d jest grubością tarczy, a L_r oznacza tzw. długość radiacyjną dla materiału tarczy, którą z kolei dobrze przybliża formuła (PDG, PRD 66 (2002) 010001) :

$$L_r = \frac{716.4\,A_d}{Z_d(Z_d+1)\ln\left(287/\sqrt{Z_d}\right)}\ \ \mathrm{g/cm}^{-2}\,.$$

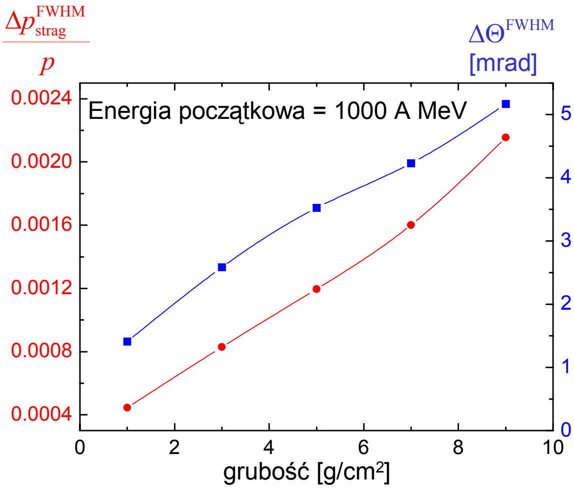
⟹ dla tarczy ^{9}Be : $L_r = 65\ \mathrm{g/cm}^2$

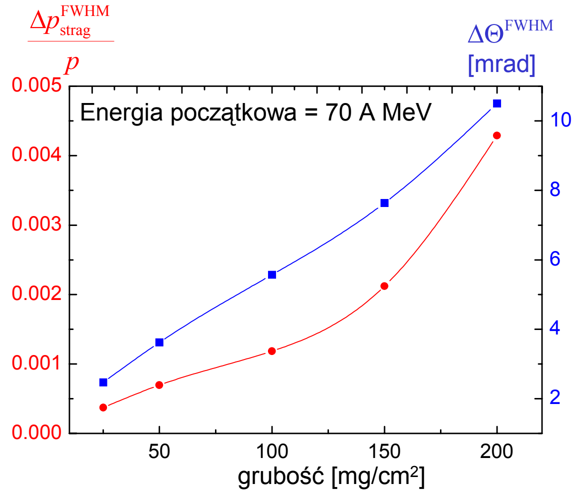
^{58}Ni : $L_r = 13\ \mathrm{g/cm}^2$

^{208}Pb : $L_r = 6.3\ \mathrm{g/cm}^2$

➔ Program ATIMA pozwala obliczyć nie tylko straty energii jonu po przejściu przez warstwę materii i jego zasięg, ale także rozrzut strat energii i wariancję rozkładu kątowego.

Przykłady obliczeń : ^{100}Sn przechodzi przez beryl – wpływ grubości tarczy :



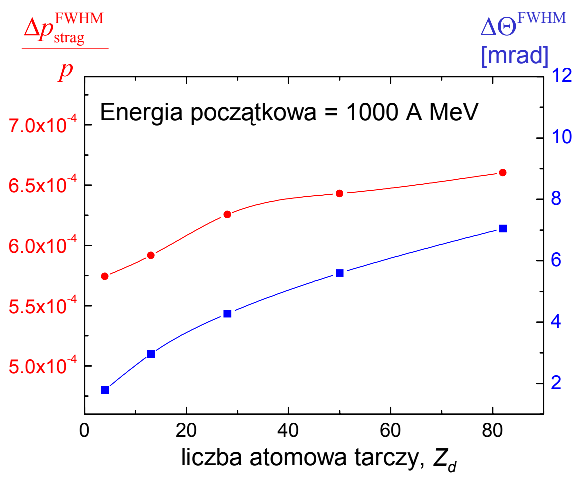


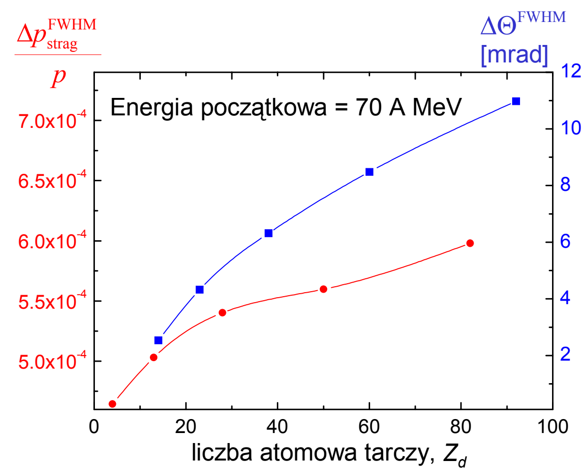
Kinematyka reakcji (Wykład 7 s.10) :

$\Delta p_{\parallel}^{FWHM} / p = 0.0086 \qquad \Delta\theta = \dfrac{\Delta p_{\perp}^{FWHM}}{p} = 4.1\,\mathrm{mrad}$

$\Delta p_{\parallel}^{FWHM} / p = 0.021 \qquad \Delta\theta = \dfrac{\Delta p_{\perp}^{FWHM}}{p} = 19\,\mathrm{mrad}$

Przykłady obliczeń : ^{100}Sn przechodzi przez tarczę, której grubość wynosi 10 % zasięgu jonu w danym materiale – wpływ liczby atomowej tarczy, Z_d :





Kinematyka reakcji (Wykład 7 s.10) :

$\Delta p_{\parallel}^{FWHM} / p = 0.0086 \qquad \Delta\theta = \dfrac{\Delta p_{\perp}^{FWHM}}{p} = 4.1\,\mathrm{mrad}$

$\Delta p_{\parallel}^{FWHM} / p = 0.021 \qquad \Delta\theta = \dfrac{\Delta p_{\perp}^{FWHM}}{p} = 19\,\mathrm{mrad}$

Kinematyczne własności wiązki produktów – podsumowanie

- Produkty reakcji wybiegają z tarczy w wąskim stożku – cechę tę nazywa się ogniskowaniem kinematycznym. Na kąt rozwarcia tego stożka składa się :
  - wartość pędu poprzecznego wynikająca z mechanizmu reakcji;
    - dla fragmentacji od kilku do kilkunastu mrad,
    - dla rozszczepienia >50 mrad,
  - rozproszenia w materiale tarczy – od kilku do kilkunastu mrad.

- Pęd podłużny (energia kinetyczna) produktów ma pewien rozkład, na szerokość którego składa się :
  - rozrzut pędu podłużnego wynikający z mechanizmu reakcji,
    - dla fragmentacji rzędu 1% (rośnie z liczbą oderwanych nukleonów)
    - dla rozszczepienia rzędu 10%,
  - location straggling, gdy fragment ma liczbę atomową Z inną niż pocisk,
  - rozrzut strat energii (energy-loss straggling) – zwykle znacznie mniejszy od 1%.

Stany ładunkowe fragmentów

Produkty reakcji opuszczają tarczę w różnych stanach ładunkowych. W przypadku energii relatywistycznych regułą jest, że jony fragmentów zawierają co najwyżej kilka elektronów.

O rozkładzie stanów ładunkowych decyduje suma wielu oddziaływań danego jonu z atomami tarczy, w wyniku których elektrony są zdzierane z jonu bądź przez niego wychwytywane.

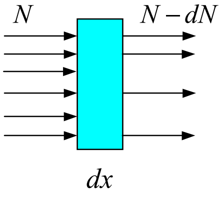
- Jako ilustrację poważnych obliczeń rozkładu stanów ładunkowych omówimy bardzo prosty model trzystanowy.

Wprowadzenie (na rozgrzewkę) :

na tarczę o grubości *dx* pada *N* cząstek; z przekrojem czynnym σ z wiązki usuwanych jest *dN* cząstek.

$$\frac{dN}{N} = -\frac{nS\,dx\sigma}{S} = -n\sigma\,dx = -\sigma\,dt\,,$$

gdzie $t = nx = \frac{N_A \rho x}{A}$ jest grubością tarczy w atomach/cm^2



⇨ czyli $\frac{dN}{dt} = -N\sigma$.

➔ Model trzystanowy ogranicza się tylko do trzech stanów ładunkowych, w których jon nie ma żadnych elektronów, ma jeden (jon wodoropodobny), lub ma dwa (stan helopodobny).

Zatem każda z *N* cząstek, w każdej chwili, znajduje się w jednym z tych trzech stanów :

$$N = N_0 + N_1 + N_2 \ .$$

Przez F_i oznaczamy frakcję cząstek w stanie *i* :

$$F_0 = N_0/N \ , \quad F_1 = N_1/N \ , \quad F_2 = N_2/N \ ,$$
$$1 = F_0 + F_1 + F_2 \ .$$

Zmiana frakcji *F* z głębokością w tarczy opisana jest przez układ równań :

$$\frac{dF_0}{dt} = -\sigma_{0c} F_0 + \sigma_{1l} F_1 \ ,$$
$$\frac{dF_1}{dt} = \sigma_{0c} F_0 - (\sigma_{1c} + \sigma_{1l}) F_1 + \sigma_{2l} F_2 \ ,$$
$$\frac{dF_2}{dt} = \sigma_{1c} F_1 - \sigma_{2l} F_2 \ ,$$

gdzie

σ_{nc} – to przekrój na wychwyt elektronu (capture) przez jon w stanie *n* ,

σ_{nl} – to przekrój na utratę elektronu (loss) przez jon w stanie *n* .

Mamy oczywiście : $\dfrac{dF_0}{dt} + \dfrac{dF_1}{dt} + \dfrac{dF_2}{dt} = 0 \ .$

Dodatkowe założenia upraszczające :

$$\sigma_{2l} = 2\sigma_{1l} \ , \quad \sigma_{0c} = 2\sigma_{1c} \ .$$

Rozwiązanie układu równań daje pełny rozkład stanów ładunkowych w funkcji głębokości w zależności od stanu początkowego. Układ ten daje się stosunkowo łatwo rozwiązać analitycznie (polecamy jako ćwiczenie dla ambitnych). Okazuje się, że rozwiązania mają następującą postać :

$$F_i(t) = a_i + b_i \exp(-\lambda_1 t) + c_i \exp(-\lambda_2 t) \ ,$$

gdzie a_i, b_i, c_i są stałymi zależnymi od warunków początkowych i od przekrojów czynnych, a

$$\lambda_1 = \sigma_{0c} + 2\sigma_{1l} \ , \quad \lambda_2 = \frac{\sigma_{0c}}{2} + \sigma_{1l} \ .$$

Wartości przekrojów czynnych są dodatnie, widać zatem, że dla dostatecznie dużych *t*, czyli dla $t >> 1/\min\{\lambda_1, \lambda_2\}$ człony wykładnicze znikają i wartości frakcji F_i przestają zależeć od głębokości ⇨ ustala się równowaga stanów ładunkowych.

Wiedząc już, że na pewnej głębokości ustala się równowaga, możemy bardzo łatwo obliczyć wartości frakcji F_i w tym stanie. Zachodzi wtedy :

$$\frac{dF_i}{dt} = 0, \quad \text{czyli :}$$

$$\begin{aligned} -\sigma_{0c} F_0 + \sigma_{1l} F_1 &= 0, \\ \sigma_{0c} F_0 - (0.5\sigma_{0c} + \sigma_{1l}) F_1 + 2\sigma_{1l} F_2 &= 0, \\ 0.5\sigma_{0c} F_1 - 2\sigma_{1l} F_2 &= 0, \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} F_1 &= \frac{\sigma_{0c}}{\sigma_{1l}} F_0 = A F_0, \\ F_2 &= \frac{0.5\sigma_{0c}}{2\sigma_{1l}} F_1 = \frac{1}{4} A F_1 = \frac{1}{4} A^2 F_0, \end{aligned}$$

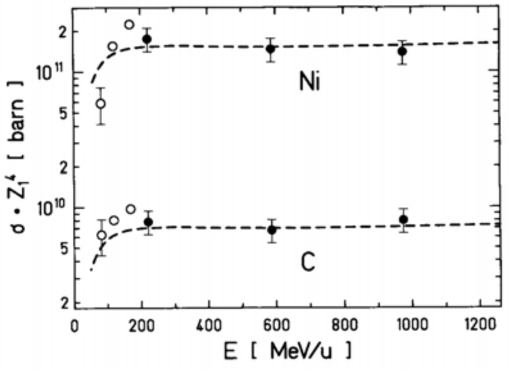
$$F_0 = 1 - F_1 - F_2 = 1 - A F_0 - \frac{1}{4} A^2 F_0,$$

$$F_0 \left(1 + A + \frac{1}{4} A^2 \right) = 1,$$

$$\Rightarrow \; F_0 = \frac{1}{1 + A(1 + A/4)}.$$

→ O równowagowym rozkładzie stanów ładunkowych decyduje zatem tylko stosunek : $A = \dfrac{\sigma_{0c}}{\sigma_{1l}}$.

Przekroje na wychwyt elektronu i na jonizację mierzy się w doświadczeniach (np. w pierścieniu ESR). Rozwijane są też zaawansowane modele teoretyczne.



← Jonizacja : $\sigma_{1l} \propto \dfrac{Z_d^2}{Z_p^4}$:

jony Au (pełne symbole) i Bi (otwarte) na tarczach węgla i niklu.

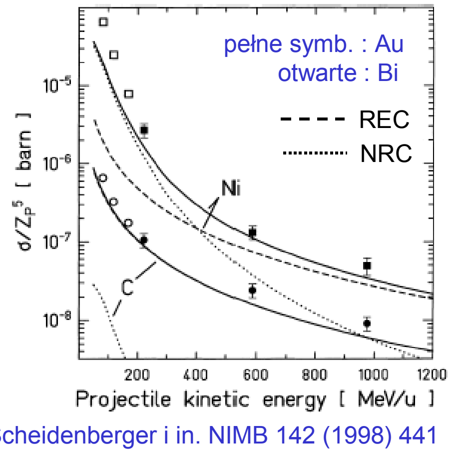
→ Wychwyt elektronu zachodzi poprzez dwa procesy :

– wychwyt promienisty (REC)

$$\sigma_{0c}^{\mathrm{REC}} \propto Z_d Z_p^5,$$

– wychwyt bezpromienisty (NRC)

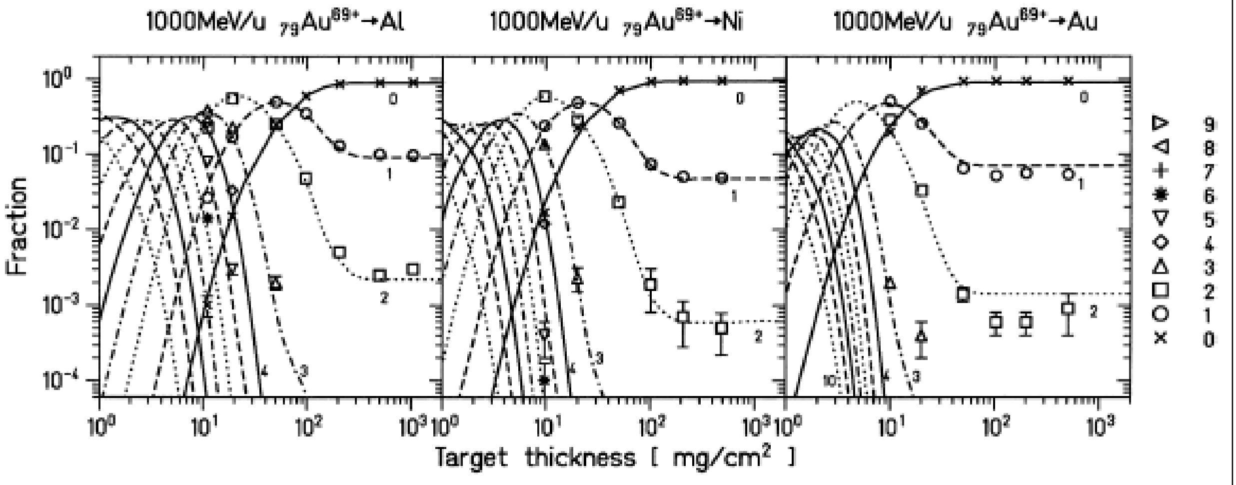
$$\sigma_{0c}^{\mathrm{NRC}} \propto Z_d^5 Z_p^5,$$



Scheidenberger i in. NIMB 142 (1998) 441

Porównanie wyników doświadczeń z zaawansowanym modelem teoretycznym.

Ne-podobne jony złota (10 elektronów) przechodzą przez 3 tarcze. Śledzimy rozwój stanów ładunkowych. Rozkład równowagowy jest osiągany najszybciej w tarczy najcięższej. Linie teoretyczne obliczone przy pomocy programu GLOBAL.



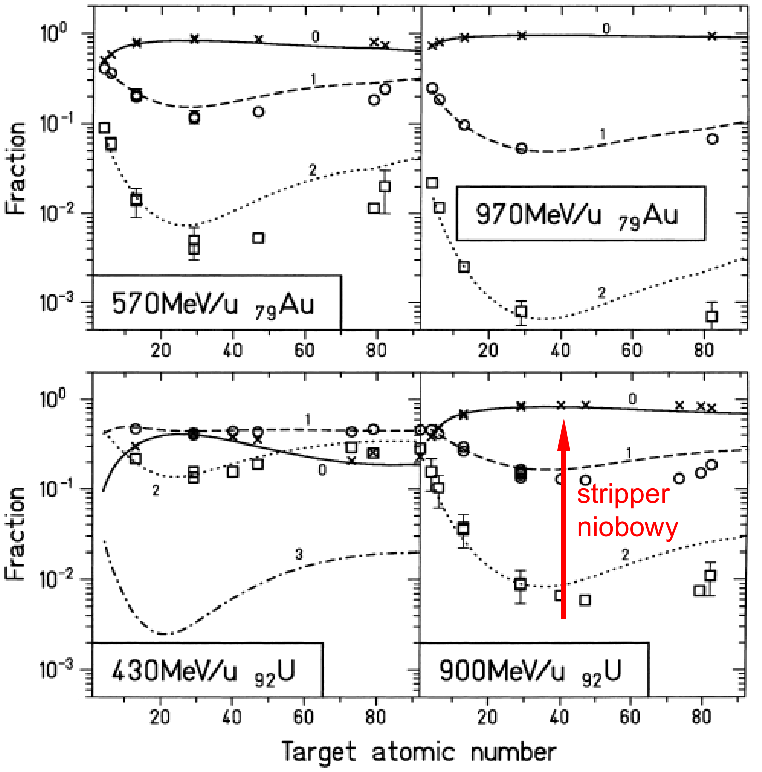
Scheidenberger i in. NIMB 142 (1998) 441

Demonstracja programu **GLOBAL** ⇨ http://www.nscl.msu.edu/lise

Przykład 1 : 1000 A MeV ^{197}Au w tarczy niklowej,
d = 100 mg/cm^2,
grubość równowagowa,
ewolucja stanów ładunkowych.

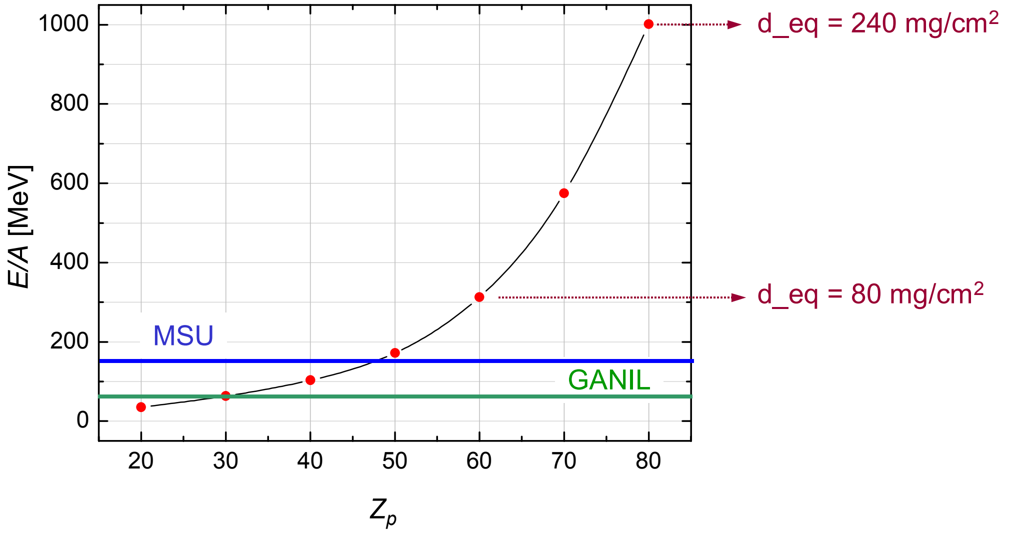
Przykład 2 : 750 A MeV ^{238}U w różnych tarczach,
wybór najlepszego strippera,
wpływ stanu początkowego.

Zmierzone i obliczone rozkłady równowagowe dla jonów Au i U w różnych targetach



Scheidenberger i in. NIMB 142 (1998) 441

Jaką energię muszą mieć ciężkie jony, aby po przejściu przez warstwę aluminium w równowadze ładunkowej 90 % z nich było pozbawione elektronów ? Obliczenia programem GLOBAL :



Reakcje wtórne

Jony wiązki wtórnej (fragmenty pocisku) przechodząc przez tarczę i przez inne warstwy materiału (np. detektory) mogą inicjować reakcje jądrowe. W wyniku takich reakcji wiązka wtórna ulega osłabieniu.

➔ Dla obliczenia intensywności wiązki wtórnej po przejściu przez warstwę materii konieczna jest znajomość całkowitego przekroju czynnego na reakcję cząstek wiązki z jądrami w tej warstwie. Mówiąc ściślej chodzi nam o przekrój na wszystkie procesy, które prowadzą do zmiany liczby nukleonów w jądrze pocisku.

➔ Przy energiach relatywistycznych można założyć, że każda reakcja jądrowa (wynik kontaktu jądra pocisku z jądrem tarczy) i każde wzbudzenie kulombowskie skutkuje utratą nukleonów.

Możemy zatem napisać :

$$\sigma^{\mathrm{tot}} = \sigma_{\mathrm{N}}^{\mathrm{tot}} + \sigma_{\mathrm{C}}^{\mathrm{tot}} .$$

Przekrój na wzbudzenie kulombowskie $\sigma_{\mathrm{C}}^{\mathrm{tot}}$ omawialiśmy już na stronach 62 – 69.

Całkowity przekrój czynny na reakcję jądrową jest nieźle opisany formułami geometrycznymi. Dwa najbardziej rozpowszechnione przybliżenia to :

➔ Formuła Koxa (Kox i in., PRC35 (1987) 1678)

$$\sigma_{\mathrm{N}}^{\mathrm{tot}} = \pi r_0^2 \left(A_p^{1/3} + A_d^{1/3} + a \frac{A_p^{1/3} A_d^{1/3}}{A_p^{1/3} + A_d^{1/3}} - c \right)^2 \left(1 - \frac{B}{E^{\mathrm{CM}}} \right),$$

gdzie E^{CM} jest energią kinetyczną pocisku w układzie środka masy partnerów reakcji, a B jest wysokością bariery kulombowskiej :

$$B = \frac{Z_p Z_d e^2}{r_C (A_p^{1/3} + A_d^{1/3})},$$ kwadrat ładunku elementarnego : $e^2 = 1.44\,\mathrm{MeV\ fm}$,

zaś wartości pozostałych parametrów :

$r_C = 1.3\ \mathrm{fm},\quad r_0 = 1.1\ \mathrm{fm},\quad a = 1.85$. Wartość *c* zależy od energii jonów :

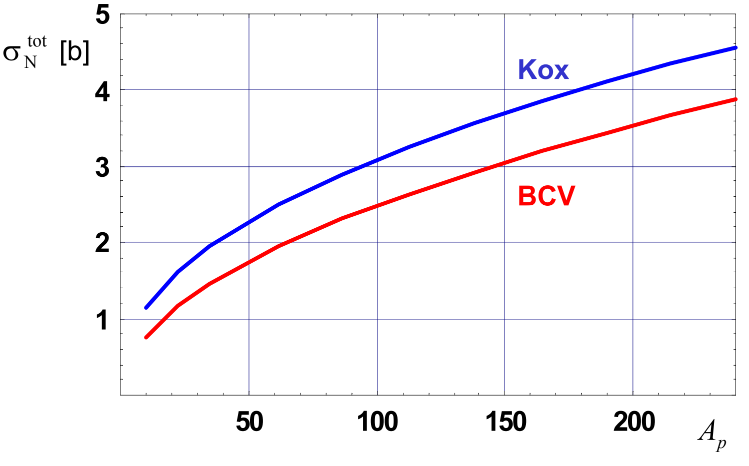
E^{LAB} [A MeV]	30	44	83	200–300	900–2100
c	0.65	1.2	1.65	2.05	1.9

→ Formuła BCV (Benesh, Cook i Vary, PRC40 (1989) 1198)

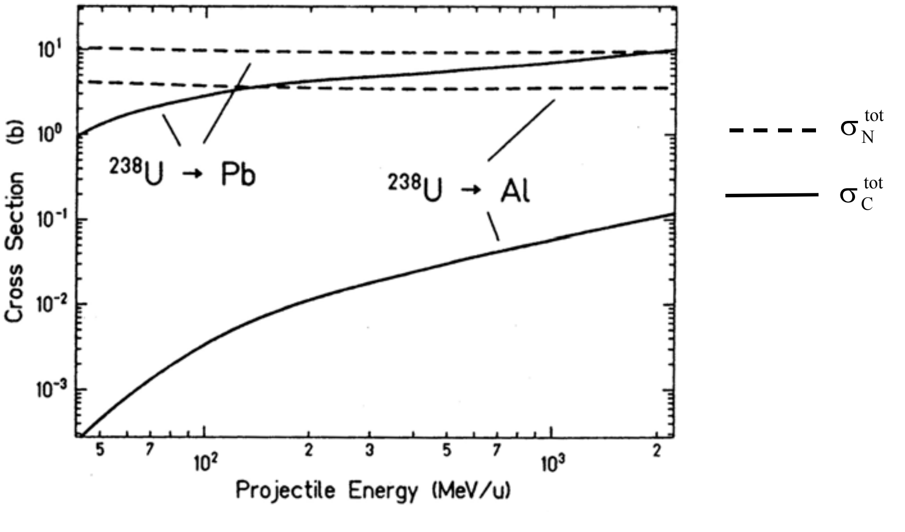
$$\sigma_N^{tot} = \pi r_0^2 \left(A_p^{1/3} + A_d^{1/3} - X\left(\frac{1}{A_p^{1/3}} + \frac{1}{A_d^{1/3}} \right) \right)^2 \left(1 - \frac{B}{E^{CM}} \right),$$

gdzie $r_0 = 1.34\ \mathrm{fm}, \quad X = 0.75$.

Porównanie obu formuł : różne pociski w aluminium (A=27) przy dużej energii (wpływ bariery kulombowskiej do zaniedbania) :



Inny przykład : pocisk ^{238}U w tarczy Pb i Al przy różnych energiach – porównanie wpływu oddziaływań jądrowych i kulombowskich :



Th. Schwab, Ph.D., GSI REPORT-91-10

Optymalna grubość tarczy

Materiał i grubość tarczy ma wpływ na wydajność produkcji i separacji wybranego nuklidu. Przy wyborze optymalnej tarczy należy wziąć pod uwagę nie tylko przekrój czynny na produkcję, ale także wydajność produkcji, straty w wyniku reakcji wtórnych, rozkład stanów ładunkowych oraz wpływ rozkładu kątowego i rozkładu pędu poprzecznego na transmisję produktu przez separator.

Wydajność reakcji – oszacowanie dla cienkiej tarczy

→ Przekroje czynne na produkcję fragmentów rzadko przekraczają 10 mb.
Całkowite przekroje na reakcję wynoszą typowo kilka b.
Oszacujmy prawdopodobieństwo reakcji dla przekroju 1 mb i 1 b.

Z wyprowadzenia na stronie 100 wynika, że :

$P_r = \left|\frac{dN}{N}\right| = \sigma\, t$, gdzie t jest grubością tarczy w atomach/cm^2 : $t = nx = \frac{N_A \rho x}{A}$.

Dla tarczy Al o grubości 1 g/cm^2 : $t = \frac{6.022\cdot 10^{23}\ 1\ \mathrm{g/cm^2}}{27\ \mathrm{g}} = 2.2\cdot 10^{22}\ 1/\mathrm{cm^2}$.

$$\sigma = 1\,\mathrm{b} \;\Rightarrow\; P_r = 1\cdot 10^{-24}\cdot 2.2\cdot 10^{22} = 2.2\cdot 10^{-2}$$
$$\sigma = 1\,\mathrm{mb} \;\Rightarrow\; P_r = 1\cdot 10^{-27}\cdot 2.2\cdot 10^{22} = 2.2\cdot 10^{-5}$$

Straty wiązki w grubym materiale

Całkowity przekrój czynny na reakcję oznaczmy przez Σ.

$$\frac{dN}{dt} = -N\Sigma \qquad \Rightarrow\; N(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\Sigma t}\,.$$

Produkcja w grubym materiale

Wiązka pierwotna oraz wiązka produktów ulega osłabieniu w wyniku reakcji wtórnych. Niech $N_p(t)$ i $N_f(t)$ oznaczają liczby cząstek wiązki pierwotnej i fragmentów na głębokości t .

Całkowite przekroje na reakcję dla pocisków i fragmentów oznaczamy odpowiednio przez Σ_p i Σ_f , a σ niech będzie przekrojem na produkcję fragmentu przez pocisk.

Dla pocisków mamy wtedy :

$$N_p(t) = N_0\, \mathrm{e}^{-\Sigma_p t}\,,$$

natomiast dla fragmentów :

$$\frac{dN_f}{dt} = -N_f\Sigma_f + N_p\sigma = -N_f\Sigma_f + \sigma N_0\, \mathrm{e}^{-\Sigma_p t}\,.$$

Musimy więc rozwiązać następujące r-nie niejednorodne :

$$\frac{dN_f}{dt} = -N_f \Sigma_f + \sigma N_0 \, e^{-\Sigma_p t} \, .$$

Znajdujemy najpierw ogólne rozwiązanie r-nia jednorodnego :

$$\frac{dN_f}{dt} = -N_f \Sigma_f \;\Rightarrow\; N_{f1} = A \, e^{-\Sigma_f t} \, ,$$

następnie zgadujemy, że szczególne rozwiązanie pełnego r-nia ma postać :

$N_{f2} = B \, e^{-\Sigma_p t}$ i sprawdzamy

$$-B\Sigma_p e^{-\Sigma_p t} = -B\Sigma_f \, e^{-\Sigma_p t} + \sigma N_0 e^{-\Sigma_p t} \, ,$$

$$B(\Sigma_f - \Sigma_p) = \sigma N_0 \;\Rightarrow\; B = \frac{\sigma N_0}{\Sigma_f - \Sigma_p} \, .$$

Ogólne rozwiązanie pełnego r-nia ma więc postać :

$$N_f = N_{f1} + N_{f2} = A e^{-\Sigma_f t} + \frac{\sigma N_0}{\Sigma_f - \Sigma_p} \, e^{-\Sigma_p t} \, .$$

Stałą *A* wyznaczamy z warunku początkowego :

$$N_f(0) = 0 \quad \Rightarrow \; A = -\frac{\sigma N_0}{\Sigma_f - \Sigma_p} \, .$$

➔ Ostatecznie, liczba wytworzonych fragmentów na głębokości *t* wynosi :

$$N_f(t) = \frac{\sigma N_0}{\Sigma_f - \Sigma_p} \left(e^{-\Sigma_p t} - e^{-\Sigma_f t} \right) .$$

Uwaga ! To rozwiązanie jest poprawne wtedy, gdy $\Sigma_p \neq \Sigma_f$, czyli przeważnie.

Jeśli $\Sigma_p = \Sigma_f = \Sigma$, to (sprawdzić !) :

$$N_f(t) = N_0 \sigma \, t e^{-\Sigma t} \, .$$

Przykład 1 : ^{58}Ni + ^{9}Be → ^{40}Ti . $\Sigma_p^{\mathrm{BCV}} = 1.19 \, \mathrm{b}$, $\Sigma_f^{\mathrm{BCV}} = 0.934 \, \mathrm{b}$.

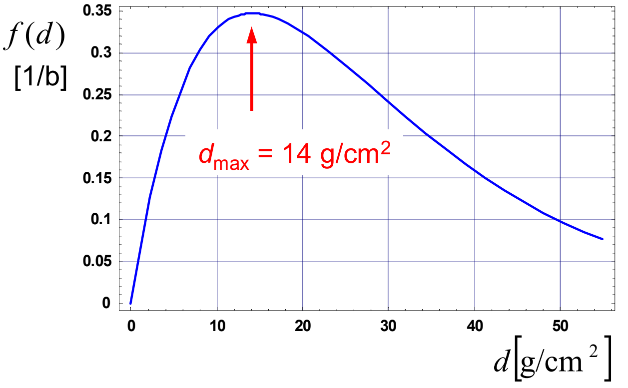
Zmiana jednostek :

$t = nx = \frac{N_A \rho}{A} x = \frac{N_A}{A} d$, gdzie *d* jest grubością w [g/cm^2],

czyli

$$t\left[\frac{1}{\mathrm{b}}\right] = 10^{-24} \cdot t\left[\frac{1}{\mathrm{cm}^2}\right] = 10^{-24} \cdot \frac{N_A}{A[\mathrm{g}]} d\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2}\right] = 6.67 \cdot 10^{-2} d\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^2}\right] .$$

Badamy przebieg funkcji $f(t) = \dfrac{e^{-\Sigma_p t} - e^{-\Sigma_f t}}{\Sigma_f - \Sigma_p}$:

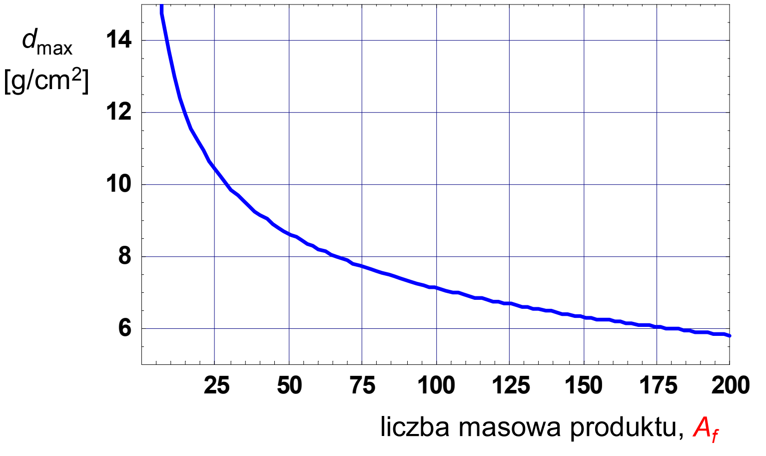


Wniosek : dla pewnej wartości d wydajność produkcji jest największa.

➔ Można łatwo obliczyć (ćwiczenie !), że optymalna grubość tarczy wynosi :

$$t_{max} = \frac{\ln(\Sigma_p/\Sigma_f)}{\Sigma_p - \Sigma_f}, \qquad d_{max}\ [\mathrm{g/cm^2}] = 10^{24}\frac{A}{N_A}t_{max}\ [1/\mathrm{b}].$$

Przykład 2 : ^{208}Pb + ^{9}Be → A_f ⇨ optymalna grubość tarczy wg formuły BCV



➔ W praktyce jednak transmisja spektrometru (akceptowany zakres kątów i pędów) istotnie zmniejsza optymalną grubość tarczy. Dla fragmentów o dużym Z jeszcze większe ograniczenie może wynikać z optymalizacji rozkładu stanów ładunkowych.

Wybór materiału tarczy

Jeśli zamierzamy wykorzystać dysocjację e-m, np. do kulombowskiego rozszczepienia ciężkich pocisków, to musimy wybrać tarczę ciężką, tj. o dużej liczbie Z. W takich przypadkach najczęściej stosuje się ołów.

Dla reakcji fragmentacji przy dużej energii najlepsza jest tarcza najlżejsza, czyli o najmniejszych liczbach A i Z. Najczęściej wybiera się beryl.

➔ Dlaczego ?

Wróćmy do przybliżenia cienkiej tarczy (patrz s. 113). Wydajność reakcji określona jest przez iloczyn przekroju czynnego i grubości tarczy w atomach/cm^2 :

$$P_r = \left|\frac{dN}{N}\right| = \sigma\, t\,.$$

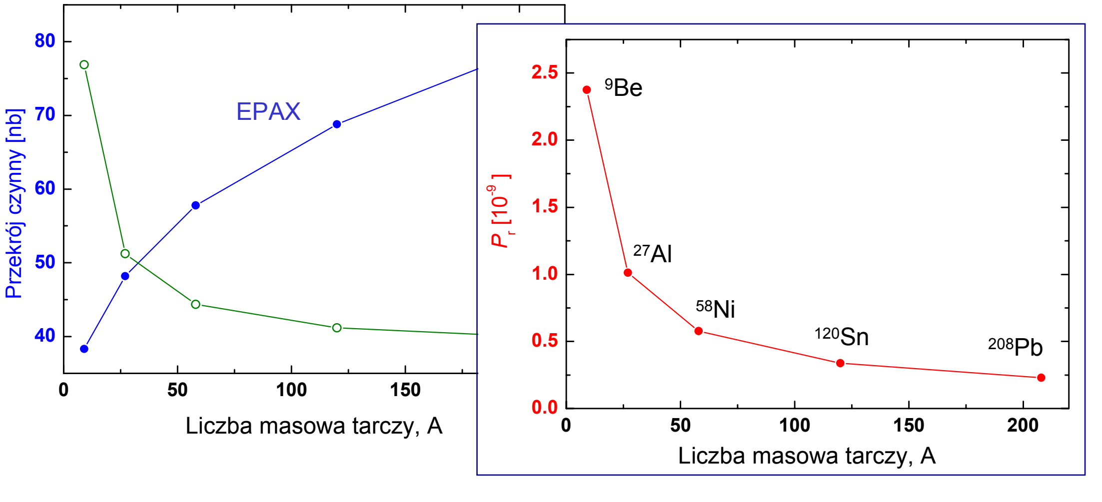
⇨ Dobrze jest więc wybrać taką tarczę, która ma najwięcej atomów/cm^2.

Ponieważ $t = \dfrac{N_A}{A}\, d$, a grubość d (w g/cm^2) jest ograniczona przez akceptowalny zakres pędów, reakcje wtórne, stany ładunkowe itd., to należy wybrać tarczę o najmniejszej liczbie A !

Dokładniejsza analiza dla przykładu : ^{58}Ni + X → ^{40}Ti.

Badamy jak prawdopodobieństwo reakcji zależy od rodzaju tarczy przy ustalonej grubości d =1 g/cm^2.

$$P_r = \sigma\, f(t)\,, \qquad f(t) = \frac{e^{-\Sigma_p t} - e^{-\Sigma_f t}}{\Sigma_f - \Sigma_p}\,.$$



Dla reakcji fragmentacji przy niskich energiach sytuacja nie jest już tak prosta !
Przy wytwarzaniu skrajnie egzotycznych nuklidów, obok fragmentacji, pewną rolę odgrywają inne mechanizmy reakcji, jak transfer wielonukleonowy.
Ich wkład silniej zależy od rodzaju tarczy niż fragmentacja i w konsekwencji tarcza berylowa nie zawsze jest najlepsza.

Przykład 1 : Historia wytwarzania ^{100}Sn.

1. GSI : ^{124}Xe @1000 A MeV + ^{9}Be : $\sigma = 11\,\mathrm{pb}$
   Schneider i in. Z. Phys. A 348 (1994) 241.

2. GANIL : ^{112}Sn @63 A MeV + ^{nat}Ni : $\sigma \geq 120\,\mathrm{pb}$
   Lewitowicz i in. PLB 332 (1994) 20.

3. GSI : ^{112}Sn @1000 A MeV + ^{9}Be : $\sigma = 1.8\,\mathrm{pb}$
   Faestermann i in. EPJA 15 (2002) 185.

Wniosek : przy niższej energii tarcza niklowa wydaje się lepsza.