Transformata Fouriera

Przyjmujemy następującą definicję transformaty Fouriera i transformaty odwrotnej:

$$\psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \psi(x) \qquad \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k \mathrm{e}^{ikx} \psi(k)$$

gdzie całkowanie rozciąga się od $-\infty$ do $+\infty$.

Transformata Fouriera jest operacją liniową:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} (\alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x)) = \alpha_1 \psi_1(k) + \alpha_2 \psi_2(k)$$

co wynika bezpośrednio z liniowości całki.

Wzór na transformatę funkcji sprzężonej:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \psi(x)^* = \psi(-k)^*$$

otrzymujemy sprzęgając całą całkę. Wynikają zeń własności transformaty funkcji rzeczywistej i czysto urojonej:

$$\psi(x) = \pm\psi(x)^* \qquad \psi(k) = \pm\psi(-k)^*$$

Wzór na transformatę funkcji odbitej:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \psi(-x) = \psi(-k)$$

dostajemy wprowadzając zmienną $x' = -x$. Wynika zeń, że jeśli funkcja jest parzysta lub nieparzysta, to jej transformata również jest odpowiednio parzysta lub nieparzysta:

$$\psi(x) = \pm\psi(-x) \qquad \psi(k) = \pm\psi(-k)$$

Wzór na transformatę funkcji przeskalowanej:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \psi(ax) = \frac{1}{a} \psi\left(\frac{k}{a}\right) \qquad a > 0$$

dostajemy wprowadzając zmienną $x' = ax$.

Wzór na transformatę funkcji przesuniętej:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \psi(x - x_0) = \mathrm{e}^{-ikx_0} \psi(k)$$

otrzymujemy wprowadzając zmienną $x' = x - x_0$.

Wzór na transformatę funkcji pomnożonej przez fazę:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \mathrm{e}^{ik_0x} \psi(x) = \psi(k - k_0)$$

wynika bezpośrednio z definicji.

Wzór na transformatę pochodnej:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-ikx}\psi'(x) = ik\psi(k)$$

dostajemy całkując przez części i uwzględniając fakt, że $\psi(\pm\infty) = 0$.

Wzór na transformatę funkcji pomnożonej przez zmienną:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-ikx}x\psi(x) = i\psi'(k)$$

można otrzymać np. wyprowadzając jak poprzednio wzór na transformatę odwrotną pochodnej i biorąc transformatę zwykłą obu stron.

Splot dwóch funkcji definiujemy następująco:

$$(\psi * \phi)(x) = \int \mathrm{d}x'\psi(x')\phi(x-x') = \int \mathrm{d}x'\psi(x-x')\phi(x')$$

Wzór na transformatę splotu:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-ikx}(\psi * \phi)(x) = \sqrt{2\pi}\psi(k)\phi(k)$$

otrzymujemy podstawiając definicję splotu do wzoru na transformatę, rozpisując $\mathrm{e}^{-ikx} = \mathrm{e}^{-ikx'}\mathrm{e}^{-ik(x-x')}$, wprowadzając zmienną $y = x - x'$ i zauważając, że całka podwójna separuje się na iloczyn dwóch całek.

Wzór na transformatę iloczynu dwóch funkcji:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \mathrm{d}x\mathrm{e}^{-ikx}\psi(x)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\psi * \phi)(k)$$

można dostać np. wyprowadzając jak poprzednio wzór na transformatę odwrotną splotu i biorąc transformatę zwykłą obu stron.

Tożsamość Parsevala:

$$\int \mathrm{d}x\psi(x)^*\phi(x) = \int \mathrm{d}k\psi(k)^*\phi(k)$$

dowodzimy np. wychodząc od prawej strony, podstawiając definicję transformat $\psi(k)$ i $\phi(k)$, zamieniając odpowiednio kolejność całkowania i korzystając z faktu, że:

$$\int \mathrm{d}k\mathrm{e}^{ikx} = 2\pi\delta(x)$$

Delta Diraca i dystrybucje

Formalnie poprawne traktowanie dystrybucji (funkcji uogólnionych) wymaga stosowania teorii Schwartza. My uważamy dystrybucję $T(x)$ za obiekt, który może, ale nie musi mieć sensu jako zwykła funkcja, ale który można scałkować z dowolną znikającą w $\pm\infty$ funkcją próbną $f(x)$. Innymi słowy postulujemy, że sens ma całka:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}xT(x)f(x)$$

W całce tej można w zwykły sposób dokonywać operacji takich jak sprzężenie zespolone, zamiana zmiennych czy całkowanie przez części. Z kolei wszelkie równości dotyczące dystrybucji mają sens jako równości odpowiednich całek, zachodzące dla dowolnej funkcji próbnej.

Rozważmy funkcję theta Heaviside'a:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

potraktujmy ją jako dystrybucję i policzmy pochodną. Pochodne dystrybucji obliczamy całkując przez części:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \theta'(x) f(x) = f(0)$$

Określoną w ten sposób dystrybucję $\theta'(x)$ nazywamy deltą Diraca i oznaczamy $\delta(x)$. Definicją delty jest zatem równość:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \delta(x) f(x) = f(0)$$

W odróżnieniu od thety Heaviside'a delta Diraca nie ma już sensu jako zwykła funkcja, a jedynie jako dystrybucja, gdyż żadna funkcja nie spełnia tej równości.

Gdyby jednak chciać wyobrażać sobie deltę jako funkcję, to należałoby stwierdzić, że musi ona znikać wszędzie poza zerem, gdyż w przeciwnym razie całka z funkcją próbną zawierałaby wkłady spoza zera, wbrew definicji. Z kolei podstawiając w definicji funkcję próbną $f(x) = 1$ otrzymujemy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \delta(x) = 1$$

czyli pole pod wykresem delty jest równe jedności. Oznacza to, że jej wartość w zerze musi być nieskończona.

Deltę można sobie zatem wyobrażać jako bardzo wąską i wypikowaną w zerze funkcję. W istocie, można ją modelować takimi funkcjami. Całkując je z funkcją próbną, a następnie przechodząc do granicy zerowej szerokości i nieskończonej wysokości przy zachowanym jednostkowym polu otrzymuje się dokładny wynik. Najprostszym takim modelem jest funkcja

$$\delta_a(x) = \begin{cases} 1/a & -a/2 < x < a/2 \\ 0 & \text{w pozostałych punktach} \end{cases}$$

Istotnie, oznaczając przez $F(x)$ funkcję pierwotną funkcji próbnej dostajemy:

$$\lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \delta_a(x) f(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{+a/2} \mathrm{d}x f(x) = \lim_{a\to 0} \frac{F(a/2) - F(-a/2)}{a} = F'(0) = f(0)$$

Wyprowadźmy teraz z definicji kilka podstawowych własności delty Diraca. Sprzężenie delty jest równe jej samej:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \delta(x)^* f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \delta(x) f(x)$$

co zapisujemy skrótowo jako:

$$\delta(x)^* = \delta(x)$$

W analogii do zwykłych funkcji można zatem powiedzieć, że delta jest rzeczywista.

Delta jest parzysta:

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

co pokazujemy wprowadzając zmienną $x' = -x$.

Wzór na deltę przeskalowaną:

$$\delta(ax) = \frac{1}{a}\delta(x) \qquad a > 0$$

otrzymujemy wprowadzając zmienną $x' = ax$.

Wzór na deltę przesuniętą:

$$\int \mathrm{d}x \delta(x - x_0) f(x) = f(x_0)$$

otrzymujemy wprowadzając zmienną $x' = x - x_0$.

Rozważmy teraz kilka przykładów. Całkując przez części obliczamy pochodną delty:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x \delta'(x) f(x) = -f'(0)$$

Wprost z definicji otrzymujemy:

$$x\delta(x) = 0 \qquad x\delta'(x) = -\delta(x)$$

Policzmy pochodną funkcji $|x|$:

$$|x|' = \mathrm{sgn}(x)$$

gdzie

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Z kolei:

$$\mathrm{sgn}'(x) = 2\delta(x)$$

Widać, że w sensie dystrybucji istnieją pochodne funkcji nieróżniczkowalnych, a nawet nieciągłych. W punktach nieosobliwych nie różnią się one od zwykłych pochodnych, w załamaniach pojawia się $\mathrm{sgn}(x)$, a w nieciągłościach $\delta(x)$.

Policzmy teraz transformatę Fouriera i transformatę odwrotną delty. Wprost z definicji otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx} \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}k \mathrm{e}^{ikx} \delta(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Jako że transformata odwrotna transformaty i transformata transformaty odwrotnej jest równa funkcji wyjśiowej, więc wykonując te operacje odpowiednio dla lewego i prawego przypadku dostajemy:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k \mathrm{e}^{ikx} \qquad \delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-ikx}$$

Te dwa równoważne wzory stanowią tzw. fourierowskie przedstawienie delty, przydatne np. do wyprowadzenia tożsamości Parsevala.